



**Задания заключительного этапа по направлению
 «Технологии медицины будущего»**

Категория участия: «Бакалавриат»

Задача №1. 15 баллов

В археологическом образце деревянного артефакта содержится 3×10^{13} ядер радионуклида ^{14}C , в то время как в аналогичной по массе и химическому составу современного дерева - 4×10^{13} таких ядер. Период полураспада ^{14}C равен 5730 лет. Определите возраст древнего образца и минимальное время измерения активности этого образца для получения относительной точности возраста 1%.

Решение:

Закон p/a распада:

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t \ln 2}{\tau_{1/2}}\right)$$

Тогда выражение для возраста древнего образца будет:

$$t = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N(0)}{N(t)} = \frac{5730}{0.693} \ln \frac{4}{3} = 2379 \text{ (года)}$$

Время измерения активности древнего образца (при 100% эффективности детектора) с относительной точностью не хуже 1%.

$$\frac{\sigma_{N_{др}}}{N_{др}} = \sqrt{\frac{1}{N_{др}}} = \sqrt{\frac{1}{A_{др} * t_{др}}} = 0,01$$

Минимальное время измерений будет при:

$$\frac{1}{A_{др} * t_{др}} = 1 * 10^{-4}$$

$$t_{др} = \frac{1 * 10^4}{A_{др}} = \frac{1 * 10^4}{N_{др}} * \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1 * 10^4}{1.1 * 10^{13}} * \frac{5730 * 365 * 24 * 3600}{0,693} \approx 2.7 * 10^5 \text{ c} = 75 \text{ час}$$

Ответ: 2379 лет

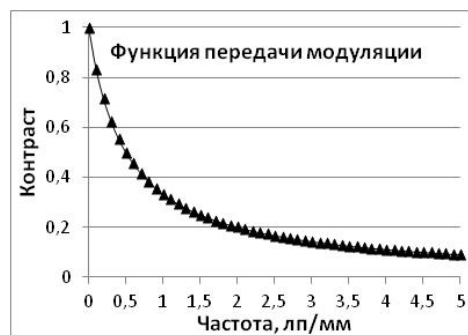
Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	0
Приступил к решению	1-4
Ошибка в вычислении возраста	5-7
Определён возраст	8-10
Определён возраст и сделана попытка определить минимальное время измерения	11-12
Определён возраст и минимальное время измерения	13-15



Задача №2. 15 баллов

Вычислите эквивалентную шумовую полосу N_e системы визуализации, если функция передачи модуляции $M(f) = 1/(1 + 2f)$, где f определяется в парах линий на мм.



Решение:

Эквивалентная шумовая полоса определяется по формуле:

$$N_e = \int_0^{+\infty} M(f)^2 df = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+2f)^2} df$$

Делаем замену:

$$= \left[\begin{matrix} 1 + 2f = x \\ 2 df = dx \end{matrix} \right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+2x} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} (-0 + 1) = \frac{1}{2} \text{ пл/мм}$$

Ответ: 1/2 пл/мм

Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	0
Приступил к решению, но без интеграла	1-4
Приступил к решению с интегралом, но не с квадратом $M(f)$	5-7
Определена эквивалентная шумовая полоса N_e	13-15



Задача №3. 20 баллов

При работе на Луне с какой максимальной высоты h_{max} может спрыгнуть космонавт в скафандре общей массой $m = 131$ кг на две прямые ноги без перелома лодыжки? Если подошвы ботинок скафандра абсолютно жесткие, замедление при таком типе приземления происходит за счет сдавливания подушечек на подошвах наших ног. Считать, что движение при торможении равноускоренное, а подушечка ноги сдавливается при ударе на $\Delta x = 1$ см. В области лодыжки радиус большой берцовой кости примерно равен $r = 1$ см. При компрессии кости обычно ломаются, если они подвергаются воздействию давления выше $P_{max} \sim 170$ МПа. Этот порог повреждения называется предельным напряжением сжатия. Ускорение свободного падения $g = 1.625$ м/с².

Решение: Потенциальная энергия тела перед прыжком составляет mgh , что равно кинетической энергии тела перед ударом о землю (сила тяжести на пути h совершает работу $A = mgh$, ускоряя тело). Затем сила торможения, действующая в противоположном направлении, совершает на пути Δx аналогичную работу тормозя тело. Кинетическая энергия в конце пути равна нулю. Поэтому:

$$mgh = F \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mgh}{\Delta x}$$

Давление можно найти по формуле:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mgh}{\Delta x \cdot S} \quad \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{\Delta x \cdot S \cdot P_{max}}{mg}$$

Площадь поперечного сечения кости в области лодыжки: $S = \pi r^2$. Для двух ног $2\pi r^2$. Произведем вычисления:

$$h_{max} = \frac{\Delta x \cdot S \cdot P_{max}}{mg} = \frac{0.01 \cdot 2 \cdot 3.14 \cdot (0.01)^2 \cdot 170 \cdot 10^6}{131 \cdot 1.625} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 170}{131 \cdot 1.625} \approx 5 \text{ м}$$

Ответ: Максимальная высота, с которой можно спрыгнуть 5 метров. Если учитывать неравномерность замедления, то максимальная высота будет существенно меньше.

Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	0
Приступил к решению	1-4
Приведены необходимые для решения формулы, но присутствует ошибка в вычислении давления	5-7
Правильно определена сила, действующая на берцовую кость	8-14
Достаточно точно определена максимальная высота	15-20



Задача №4. 20 баллов

Инновационным подходом в лечении онкологических заболеваний является использование метода фотогипертермии в сочетании с химиотерапией или лучевой терапией. При фотогипертермии раковые клетки нагреваются до температуры выше 43°C , что вызывает их гибель. В качестве сенсбилизатора фототермического воздействия можно использовать наночастицы, способные эффективно накапливаться в раковых клетках, поглощать лазерное излучение и нагреваться.

Считать, что опухоль имеет сферическую форму ($R=0,5$ см), ткань обладает постоянной теплопроводностью ($k=0,5$ Вт/м*К), поглощение биологическими тканями пренебрежимо мало по сравнению с наночастицами. Наночастицы в концентрации $C=100$ мкг/см³ с коэффициентом поглощения $h=0.8$ мкг⁻¹ и коэффициентом фототермической конверсии $j=50\%$ распределены равномерно в объёме опухоли. Мощность лазерного излучения $P=4$ мВт. Начальная температура тела $T_0=37^{\circ}\text{C}$.

Рассчитать максимальную температуру опухоли при заданных параметрах, в ответе указать в градусах Цельсия, округлив до целого. Считать процесс нагрева установившимся (стационарным), а изменения температуры вдали от опухоли пренебрежимо малыми.

Решение:

Комментарий к решению:

В условии задачи допущены опечатки: Мощность лазерного излучения должна быть 4 Вт, вместо 4 мВт, а коэффициент поглощения НЧ должен быть 0.8 мг⁻¹ вместо 0.8 мкг⁻¹. Тем не менее, допущенные опечатки не влияют на выкладки в решении и на окончательный ответ.

Доля W поглощенной НЧ лазерной энергии составляет:

$$W = mV = ChV = \frac{4}{3}\pi r^3 Ch \approx 0.04$$

Доля поглощенной энергии незначительна, поэтому можно считать, что мощность излучения постоянная внутри опухоли, тогда согласно закону сохранения энергии в области опухоли ($r < R$):

$$-4\pi r^2 * k \frac{dT}{dr} = P * (C * h * j) * \frac{4}{3}\pi r^3, (1)$$

Температура в опухоли:

$$T(r) = -\frac{P * (C * h * j) * r^2}{6k} + Const, (2)$$

Для области вне опухоли ($r > R$):

$$-4\pi r^2 * k \frac{dT}{dr} = P * (C * h * j) * \frac{4}{3}\pi R^3, (3)$$



Температура вне опухоли (считаем по условию, что нагрев пренебрежимо мал):

$$T(r) = \frac{P * (C * h * j) * R^3}{3kr} + T_0, \quad (4)$$

На границе опухоли ($r = R$, уравниваем (2) и (4)):

$$Const = \frac{P * (C * h * j) * R^2}{2k} + T_0, \quad (5)$$

Таким образом, максимальная температура в центре опухоли:

$$T = T_0 + \frac{P * (C * h * j) * R^2}{2k} = 37 + 4 = 41^\circ\text{C}, \quad (6)$$

Ответ: 41.

Критерии оценки:

Действие	Баллы
Разумные рассуждения относительно плана решения: отмечена необходимость записать уравнения баланса энергии для стационарного случая; отмечено, что эти уравнения будут разными внутри и вне опухоли	4
Верно записано уравнение баланса энергии внутри опухоли	3
Верно записано уравнение баланса энергии вне опухоли	3
Верно решено уравнение баланса энергии внутри опухоли (в общем виде)	2
Верно решено уравнение баланса энергии вне опухоли (в общем виде)	2
Правильные действия для определения констант интегрирования	3
Правильный численный ответ	3
Итого	20



Задача №5. 30 баллов

В процессе разработки команда биомехаников, работающих над созданием высокотехнологичного экзоскелета, предназначенного для помощи людям с ограниченными возможностями, сталкивается с задачей оптимизации искусственных мышечных волокон, которые должны имитировать функции реальных мышц человека.

Исследователи решили анализировать работу мышц на микроскопическом уровне, используя модель, основанную на уравнении Хилла. В ходе экспериментов они обнаружили, что при нагрузке $P = 0,4$ Н скорость сокращения v одного из прототипов искусственных мышечных волокон составляет 18 мм/с. Известно также, что максимальная нагрузка, которую способны выдержать эти волокна в изометрическом режиме сокращения, составляет $P_0 = 1,2$ Н, а постоянная a , характеризующая уникальные свойства материала, — $0,25$ Н.

Для улучшения дизайна экзоскелета и возможности выполнения разнообразных движений, приближенных к естественным человеческим, необходимо вычислить максимальную скорость сокращения искусственных мышечных волокон. Помогите команде биомехаников справиться с этой задачей.

Решение:

Уравнение Хилла:

$$(P + a)(v + b) = (P_0 + a)b = a(v_{\max} + b)$$

Выразим v_{\max} :

$$v_{\max} = bP_0 / a$$

Выразим b :

$$b = \frac{v(P + a)}{P_0 - P}$$

Отсюда:

$$v_{\max} = \frac{v(P + a)}{P_0 - P} \cdot \frac{P_0}{a}$$

Подставим значения в формулу:

$$v_{\max} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot (0,4 + 0,25)}{1,2 - 0,4} \cdot \frac{1,2}{0,25} = 0,702 \text{ м/с}$$

Критерии оценки:

0-5 баллов:

- Уравнение Хилла не упомянуто или использовано неверно
- Расчеты содержат грубые ошибки или отсутствуют
- Интерпретация и анализ результатов отсутствуют



- Решение изложено нелогично, трудно понять ход мысли

6-10 баллов:

- Уравнение Хилла упомянуто, но не применено в решении
- Расчеты частично верны, но содержат незначительные ошибки
- Интерпретация результатов неполная или неточная
- Решение в целом логично, но имеются неясности или пропуски в объяснениях

11-20 баллов:

- Уравнение Хилла частично использовано в решении
- Расчеты в целом верны, но имеются небольшие неточности
- Результаты интерпретированы верно, но анализ недостаточно глубокий
- Решение изложено ясно и логично, но имеются незначительные пропуски или неточности

21-30 баллов:

- Уравнение Хилла полностью и правильно применено для решения задачи
- Все расчеты и вычисления выполнены безошибочно
- Результаты полностью и точно интерпретированы, проведен глубокий анализ
- Решение изложено ясно, логично и последовательно