Задания заключительного этапа по направлению
«Технологии медицины будущего»

Категория участия: «Магистратура/Специалитет»

Задача №1. 15 баллов

В образце древней кости человека содержится $1{,}1*10^{13}$ ядер радионуклида ${}^{14}_{6}C$, в то время как в аналогичной по массе кости живого человека - 3×10^{13} таких ядер. Период полураспада ${}^{14}_{6}C$ равен 5730 лет. Определите возраст древнего образца и минимальное время измерений активностей для получения относительной точности измерения отношения активностей не хуже 1%.

Решение:

Закон р/а распада:

$$N(t) = N(0)exp\left(-\frac{tLn2}{\tau_{1/2}}\right)$$

Тогда выражение для возраста древнего образца будет:

$$t = \frac{\tau_{1/2}}{Ln2} Ln\frac{N(0)}{N(t)} = \frac{5730}{0.693} Ln\frac{3000}{1100} = 8294 \text{ (года)}$$

$$\frac{\sigma_{N\text{ж}/N\text{др}}}{N_\text{ж}/N_\text{др}} = \sqrt{\frac{1}{N_\text{ж}} + \frac{1}{N_\text{др}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{А}_\text{ж} * t_\text{ж}} + \frac{1}{\text{А}_\text{др} * t_\text{др}}} = 0{,}01$$

Минимальное время измерений будет при:

$$\frac{1}{\text{А}_\text{ж} * t_\text{ж}} = \frac{1}{\text{А}_\text{др} * t_\text{др}} = 0{,}5 * 10^{-4}$$

Отсюда:

$$t_\text{ж} = \frac{2 * 10^4}{\text{А}_\text{ж}} = \frac{2 * 10^4}{N_\text{ж}} * \frac{\tau_{1/2}}{Ln2} = \frac{2 * 10^4}{3 * 10^{13}} * \frac{5730 * 365 * 24 * 3600}{0{,}693} \approx 2.0 * 10^5 \ c$$

$$t_\text{др} = \frac{2 * 10^4}{\text{А}_\text{др}} = \frac{2 * 10^4}{N_\text{др}} * \frac{\tau_{1/2}}{Ln2} = \frac{2 * 10^4}{1.1 * 10^{13}} * \frac{5730 * 365 * 24 * 3600}{0{,}693} \approx 5.4 * 10^5 \ c$$

$T_\text{изм} = t_\text{ж} + t_\text{др} = (2{,}0 + 5{,}4)*10^5 = 7{,}4*10^5$ с = 206 час ≈ 9 суток

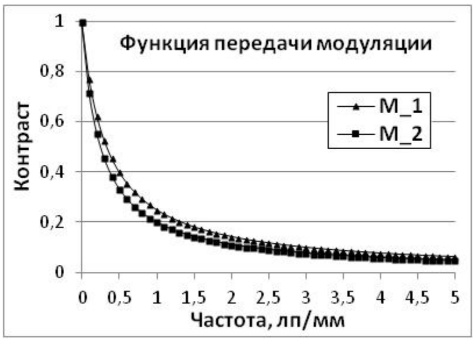
Ответ: **8294 года**

Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	**0**
Приступил к решению	**1-4**
Ошибка в вычислении возраста	**5-7**
Определён возраст	**8-10**
Определён возраст и сделана попытка определить минимальное время измерения	**11-12**
Определён возраст и минимальное время измерения	**13-15**

Задача №2. 15 баллов

Вычислите эквивалентную шумовую полосу N_e системы визуализации, состоящей из двух узлов, если функция передачи модуляции M_1(f) = 1/(1 + 3f), а M_2(f) = 1/(1 + 4f), где f определятся в парах линий на мм.



.

Решение:

Эквивалентная шумовая полоса определяется по формуле:

$$N_e(M\_1) = \int_0^{+\infty} M(f)^2 df = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+3f)^2} df$$

Делаем замену:

$$= \begin{bmatrix} 1+3f = x \\ 3\,df = dx \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} \frac{1}{3x^2} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{1+3x}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}(-0+1) = \frac{1}{3} \text{ пл/мм}$$

Аналогично для узла M_2: $N_e(M\_2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+4f)^2} df$

Делаем замену:

$$= \begin{bmatrix} 1+4f = x \\ 4\,df = dx \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4x^2} dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+4x}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}(-0+1) = \frac{1}{4} \text{ пл/мм}$$

Для системы визуализации, состоящей из двух узлов M_1 и M_2, эквивалентная шумовая полоса N_e будет равна:

$$\frac{1}{N_e} = \sqrt{\left(\frac{1}{Ne\,(M\_1)}\right)^2 + \left(\frac{1}{Ne\,(M\_2)}\right)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$N_e = 1/5 = 0{,}2 \text{ пл/мм}$$

Ответ: **1/5 пл/мм**

Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	**0**
Приступил к решению, но без интеграла	**1-4**
Приступил к решению с интегралом, но не с квадратом *M*(*f*)	**5-7**
Определены экв. шумовые полосы $N_e(M_1)$ и $N_e(M_2)$, но не N_e системы визуализации	**8-12**
Определена эквивалентная шумовая полоса N_e системы	**13-15**

<u>Задача №3. 20 баллов</u>

Какой поток крови будет проходить через сечение артерии диаметром 1 см, если максимальная частота в допплеровском спектре кровотока 5.2 кГц, минимальная 2.6 кГц, а зависимость скорости кровотока от расстояния до центра кровеносного сосуда может быть описана параболой $V(r)=a*r^2+b$. Рабочая частота датчика 4 МГц. Скорость звука в крови принять равным 1540 м/с. Ответ выразите в единицах см^3/с.

$D=f_0*2v/c \;\Rightarrow\; v=D*c/2f_0$

$V_{max}=5.2*10^3*1540/(2*4*10^6)=5.2*1.54/8=1$ м/с

$V_{min}=3.9*10^3*1540/(2*4*10^6)=2.6*1.54/8=0.75$ *м/с*

$V(r)=a*r^2+b$

Так как максимальная скорость наблюдается при r=0,

$V(r=0)=V_{max}=1$ *м/с* $\Rightarrow b= V_{max} =1$

$V(r=d/2) = V_{min}= 0.75$ *м/с* $\Rightarrow a*d^2/4+b= V_{min}$

$a*1^2/4+ V_{max} = V_{min} \;\Rightarrow\; a= (V_{min} - V_{max})*4=0.25*4=1$

$a=1$

Таким образом $\boldsymbol{V(r)=1- r^2}$, где скорость в *м/с,* а расстояние в *см*

Чтобы посчитать поток, можно вычислить среднюю скорость и умножить ее на сечение сосуда

Число эритроцитов движущихся со скоростью *v(r)* равно числу эритроцитов движущихся на расстоянии *r* от оси сосуда

$N = 2*\pi*r*l = 2*\pi*\sqrt{1-v}*l$ *, где l* – линейная плотность эритроцитов.

$$\overline{v} = \frac{\int_{vmin}^{vmax} v*N(v)dv/}{\int_{vmin}^{vmax} N(v)dv} = \frac{\int_{vmin}^{vmax} v*\sqrt{(1-v)}dv/}{\int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}dv}$$

$$\int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}dv = -\int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}d(1-v) = -\frac{2}{3}(1-v)^{\frac{3}{2}}\Big]_{vmin}^{vmax} == \frac{2}{3}(1-vmin)^{\frac{5}{2}}$$

$$\int_{vmin}^{vmax} v*\sqrt{(1-v)}dv = \int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}dv - \int_{vmin}^{vmax} (1-v)*\sqrt{(1-v)}dv$$

$-\int_{vmin}^{vmax}(1-v)*\sqrt{(1-v)}dv = \int_{vmin}^{vmax}(1-v)*\sqrt{(1-v)}d(1-v) = \frac{2}{5}(1-v)^{\frac{5}{2}}\Big]_{vmin}^{vmax} =-\frac{2}{5}(1-vmin)^{\frac{5}{2}}=$

$$\overline{v} = \frac{\int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}dv - \frac{2}{5}(1-vmin)^{\frac{5}{2}}}{\int_{vmin}^{vmax} \sqrt{(1-v)}dv} = 1 - \frac{\frac{2}{5}(1-vmin)^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}(1-vmin)^{\frac{5}{2}}} == 1 - \frac{3}{5}(1-vmin)$$

$$= 1 - \frac{3}{5}(1-0.75) = 0.85$$

Поток крови: $\Phi = \overline{v} * S = \overline{v} * \pi * \frac{\mathrm{d}^2}{4} = 85\ \text{см/с} * \frac{3.14}{4}\text{см}^2 = 66.7\ \text{см}^3/\text{с}$

Ответ: 66.7 см^3/с

Критерии оценки:

Что сделано	Баллы
Не решал	**0**
Приступил к решению	**1-4**
Правильный алгоритм, но ошибка в вычислении коэффициентов *a* и *b*	**5-7**
Правильно определено распределение скорости крови по диаметру сосуда	**8-10**
Правильно записан исходный интеграл, но ошибка в вычислении интеграла	**11-17**
Достаточно точно определен поток крови	**18-20**

Задача №4. 20 баллов

Инновационным подходом в лечении онкологических заболеваний является использование метода фотогипертермии в сочетании с химиотерапией или лучевой терапией. При фотогипертермии раковые клетки нагреваются до температуры выше 43°С, что вызывает их гибель. В качестве сенсибилизатора фототермического воздействия можно использовать наночастицы, способные эффективно накапливаться в раковых клетках, поглощать лазерное излучение и нагреваться.

Необходимо рассчитать концентрацию наночастиц в опухоли, чтобы её максимальная температура достигла 43°С. Ответ указать в мкг/ см^3, округлив до целого.

Считать, что опухоль имеет сферическую форму (R = 0,5 см), ткань обладает постоянной теплопроводностью (k = 0,5 Вт/м*K), поглощение биологическими тканями пренебрежимо мало по сравнению с наночастицами. Наночастицы с коэффициентом поглощения h = 0.8 мкг-1 и коэффициентом фототермической конверсии j = 50% распределены равномерно в объёме опухоли. Мощность лазерного излучения P = 4 мВт. Начальная температура тела $T_0 = 37°\text{C}$. Считать процесс нагрева установившимся (стационарным), а изменения температуры в дали от опухоли пренебрежимо малыми.

Решение:

Комментарий к решению:

В условии задачи допущены опечатки: Мощность лазерного излучения должна быть 4 Вт, вместо 4 мВт, а коэффициент поглощения НЧ должен быть 0.8 мг$^{-1}$ вместо 0.8 мкг$^{-1}$. Тем не менее, допущенные опечатки не влияют на выкладки в решении и на окончательный ответ.

Согласно закону сохранения энергии в стационарном режиме в области опухоли (r < R):

$$-4\pi r^2 * k\frac{dT}{dr} = P * (C * h * j) * \frac{4}{3}\pi r^3, (1)$$

В правой части этого выражения сделано предположение о том, что мощность излучения примерно постоянна на всём объеме опухоли. Правомочность этого предположения будет проверена в конце решения.
Температура в опухоли:

$$T(r) = -\frac{P(C * h * j)r^2}{6k} + T_{max}, (2)$$

Откуда видно, что максимальная температура достигается в центре опухоли (*r=0*).

Для области вне опухоли (r > R):

$$-4\pi r^2 * k\frac{dT}{dr} = P * (C * h * j) * \frac{4}{3}\pi R^3, (3)$$

Температура вне опухоли (по условию в дали от опухоли температура равна температуре тела):

$$T(r) = \frac{P * (C * h * j) * R^3}{3kr} + T_0, (4)$$

Приравнивая (2) и (4) на границе опухоли, находим выражение для максимальной температуры:

$$T_{max} = \frac{P * (C * h * j) * R^2}{2k} + T_0, (5)$$

Отсюда получаем необходимую концентрацию частиц:

$$C = \frac{(T_{max} - T_0) * 2k}{P * h * j * R^2} = 150(\text{мкг/см}^3)$$

Проверим правомочность предположения о том, что НЧ в опухоли поглощают незначительную долю энергии лазерного излучения. Доля W поглощенной НЧ лазерной энергии составляет:

$$W = mV = ChV = \frac{4}{3}\pi r^3 Ch \approx 0.06$$

Таким образом, НЧ поглощают только 6% лазерного

излучения и допущенное предположение правомочно.

Ответ: 150.

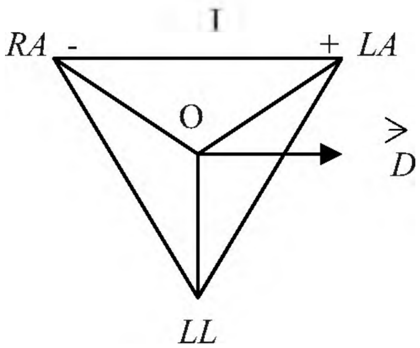
Критерии оценки:

Действие	Баллы
Разумные рассуждения относительно плана решения: отмечена необходимость записать уравнения баланса энергии для стационарного случая; отмечено, что эти уравнения будут разными внутри и вне опухоли	4
Верно записано уравнение баланса энергии внутри опухоли	3
Верно записано уравнение баланса энергии вне опухоли	3
Верно решено уравнение баланса энергии внутри опухоли (в общем виде)	2
Верно решено уравнение баланса энергии вне опухоли (в общем виде)	2
Правильные действия для определения констант интегрирования	3
Правильный численный ответ	3
Итого	20

<u>Задача №5. 30 баллов</u>

В мире биомедицинской инженерии и кардиологии, группа ученых взялась за амбициозный проект по разработке нового поколения кардиомониторов, способных с высокой точностью регистрировать электрокардиограмму (ЭКГ) в условиях повседневной активности человека. Основная цель исследования состояла в том, чтобы создать устройство, которое не только точно регистрирует сигналы сердца, но и устойчиво работает в различных условиях, минимизируя шум и искажения, обычно возникающие при движении пациента.

Для достижения этой цели команда приняла решение оценить амплитуду сигнала ЭКГ, используя модель, в которой тело человека представлено в виде однородного шара, радиус r которого равен 0,5 м. Это приближение позволило упростить расчеты, сосредоточившись на ключевых параметрах, влияющих на амплитуду сигнала. Удельное сопротивление тканей ρ = 6 Ом·м. Эквивалентный токовый диполь сердца, генерирующий электрические импульсы, вызывающие сокращения сердечной мышцы, был принят за $2 \cdot 10^{-5}$ А·м. Считается, что этот диполь направлен влево и параллелен направлению регистрации потенциала в первом стандартном отведении ЭКГ (см. рисунок). Помогите ученым справиться с этой задачей.



Решение:

Потенциал поля, создаваемого эквивалентным диполем сердца, находящимся в центре однородной шарообразной среды, измеряется на поверхности этого шара и определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{3\rho D\cos\alpha}{4\pi r^2}$$

где α - угол между вектором дипольного момента (D) и направлением на точку регистрации потенциала из центра треугольника Эйнтховена (см. рисунок).

Потенциал в точке LA («левая рука»):

$$\varphi_{LA} = \frac{3\rho D\cos 30^\circ}{4\pi r^2}$$

потенциал в точке RA («правая рука»):

$$\varphi_{RA} = \frac{3\rho D\cos 150^\circ}{4\pi r^2}$$

Искомая амплитуда сигнала ЭКГ в I стандартном отведении:

$$\Delta\varphi = \varphi_{LA} - \varphi_{RA} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{-5}(\cos 30° - \cos 150°)}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2} \approx 0{,}0002B$$

Критерии оценки:

0-5 баллов:
- Модель эквивалентного диполя сердца не упомянута или использована неверно.
- Расчеты потенциалов отсутствуют или содержат грубые ошибки.
- Амплитуда сигнала ЭКГ не вычислена или вычислена неверно.
- Решение изложено нелогично, трудно понять ход мысли.

6-10 баллов:
- Модель эквивалентного диполя сердца упомянута, но не применена в решении или применена с ошибками.
- Расчеты потенциалов частично верны, но содержат ошибки или неточности.
- Амплитуда сигнала ЭКГ вычислена, но содержит ошибки или неточности.
- Решение в целом логично, но имеются неясности или пропуски в объяснениях.

11-20 баллов:
- Модель эквивалентного диполя сердца правильно применена для решения задачи, но есть незначительные неточности.
- Расчеты потенциалов выполнены правильно, с использованием корректных углов и формул, но имеются небольшие ошибки.
- Амплитуда сигнала ЭКГ вычислена правильно на основе расчетов потенциалов, но есть незначительные неточности.
- Решение изложено ясно и логично, но имеются незначительные пропуски или неточности.

21-30 баллов:
- Модель эквивалентного диполя сердца правильно и полностью применена для решения задачи.
- Расчеты потенциалов выполнены безошибочно, с использованием корректных углов и формул.
- Амплитуда сигнала ЭКГ вычислена правильно на основе расчетов потенциалов.
- Решение изложено ясно, логично и последовательно.