

**Задания заключительного этапа по направлению
 «Нанотехнологии в электронике и радиотехнике»**

Категория участия: «Магистратура/Специалитет»

Задача 1 (10 баллов)

На оптической длине волны в 1 мкм, у LiNbO₃ коэффициенты преломления $n_o=2,238$ и $n_e=2,159$. Его три коэффициента Поккельса соответственно равны: $r_{13}=8.6$ пм/В, $r_{22}=3.4$ пм/В, $r_{33}=30.8$ пм/В.

Можно ли применить электрическое поле постоянного тока для изменения главных показателей преломления за счёт эффекта Поккельса, не вращая главные оси?

Если это возможно, найдите изменения главных показателей преломления, вызванные приложенным электрическим полем $E_0=5$ МВ/м.

Решение:

Чтобы эффект Поккельса вызывал только изменения главных показателей преломления без вращения главных осей, приложенное электрическое поле должно вызывать изменения только в диагональных, но не недиагональных элементах $\Delta\epsilon(E_0)$. Это возможно, если постоянное электрическое поле приложено только вдоль направления главной оси z так, что $E_0 = E_0\hat{z}$ для $E_{0z} = E_0$ и $E_{0x} = E_{0y} = 0$.

Изменение магнитной непроницаемости, вызванное полем, вследствие эффекта Поккельса, равно

$$\Delta\eta_\alpha(E_0) = \sum_k r_{\alpha k} E_{0k}$$

что можно выразить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \\ \Delta\eta_3 \\ \Delta\eta_4 \\ \Delta\eta_5 \\ \Delta\eta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}$$

Следовательно, если изменения, вызванные электрическим полем, представлены $\Delta\epsilon(\omega, E_0)$, помимо изменения диагональных элементов обычно генерирует недиагональные элементы, тогда:

$$\epsilon(E_0) = \epsilon + \Delta\epsilon(E_0) = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 - n_o^4 r_{13} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 - n_o^4 r_{13} E_0 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 - n_e^4 r_{33} E_0 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\epsilon(E_0)$ диагональна в системе координат исходных главных осей, все главные оси остаются неизменными:

$$\hat{X} = \hat{x}, \hat{Z} = \hat{z}, \hat{Y} = \hat{y}$$

Характеристики распространения оптической волны при наличии электрооптического эффекта определяются ϵ_X , ϵ_Y и ϵ_Z , которые определяют главные показатели преломления:

$$n_X = \sqrt{\frac{\epsilon_X}{\epsilon_0}}, \quad n_Y = \sqrt{\frac{\epsilon_Y}{\epsilon_0}}, \quad n_Z = \sqrt{\frac{\epsilon_Z}{\epsilon_0}}$$

Постоянные распространения:

$$k^X = \frac{n_X \omega}{c}, \quad k^Y = \frac{n_Y \omega}{c}, \quad k^Z = \frac{n_Z \omega}{c},$$

для основных нормальных мод поляризации $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$. Эти три новые основные нормальные моды поляризации поляризованы линейно. Следовательно, электрически индуцированное двойное лучепреломление и дихроизм, обусловленный электрооптическим эффектом, представляют собой линейное двойное лучепреломление и линейный дихроизм.

Используя все выше сказанное, можно выразить новые главные показатели преломления:

$$n_X = n_Y = (n_0^2 - n_0^4 r_{13} E_0)^{1/2} \approx n_0 - \frac{n_0^4 r_{13}}{2} E_0,$$

$$n_Z = (n_e^2 - n_e^4 r_{33} E_0)^{1/2} \approx n_e - \frac{n_e^4 r_{33}}{2} E_0.$$

Видно, что кристалл остаётся отрицательным одноосным. Изменения главных показателей преломления, вызванные приложенным электрическим полем $E_0=5$ МВ/м, равны:

1) Для обычного индекса:

$$\Delta n_X = \Delta n_Y = \Delta n_0 = -\frac{n_0^3 r_{13}}{2} E_0 = -\frac{2.228^3 \times 8.6 \times 10^{-12}}{2} \times 5 \times 10^6 = -2.41 \times 10^{-4},$$

2) Для необыкновенного индекса:

$$\Delta n_Z = \Delta n_e = -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} E_0 = -\frac{2.159^3 \times 30.8 \times 10^{-12}}{2} \times 5 \times 10^6 = -7.75 \times 10^{-4}$$

Задача 2 (10 баллов)

На представленной ниже схеме (рис. 1) значения на входах X1, X2, X3 меняются с периодичностью 3, 4 и 5 тактов соответственно (как показано на временной диаграмме на рис. 2), а начальные логические значения на входах соответствуют комбинации X1=0, X2=1, X3=0. Найдите значение на выходе синхронного десятичного счётчика спустя 15 тактов с момента t = 0 (см. временную диаграмму на рис. 2). Переходными процессами в транзисторах (любыми задержками) пренебречь. Счётчик срабатывает по фронту тактового сигнала.

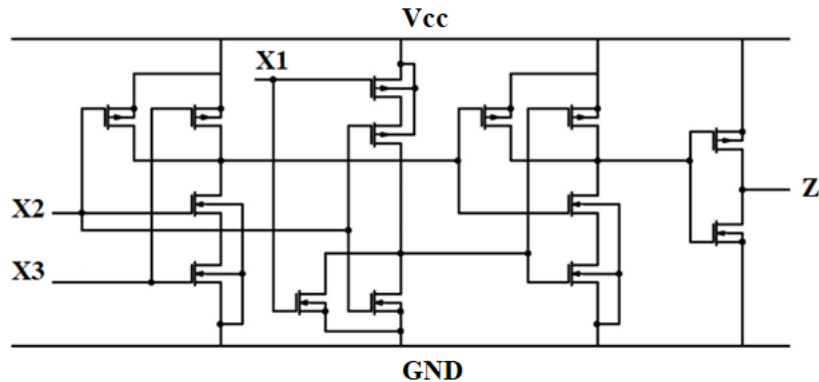


Рис. 1. Схема логического устройства.

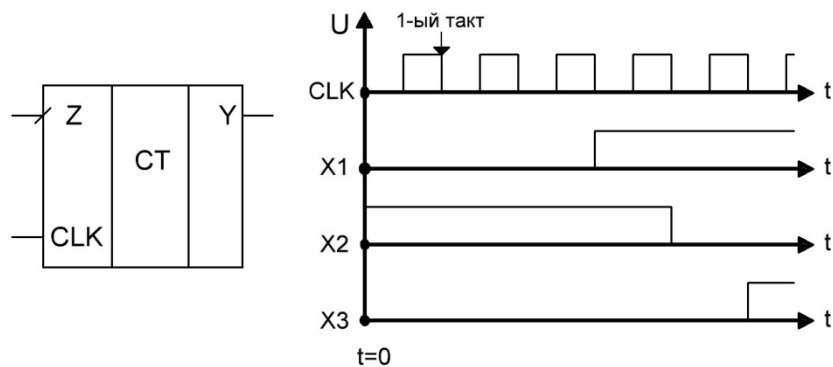


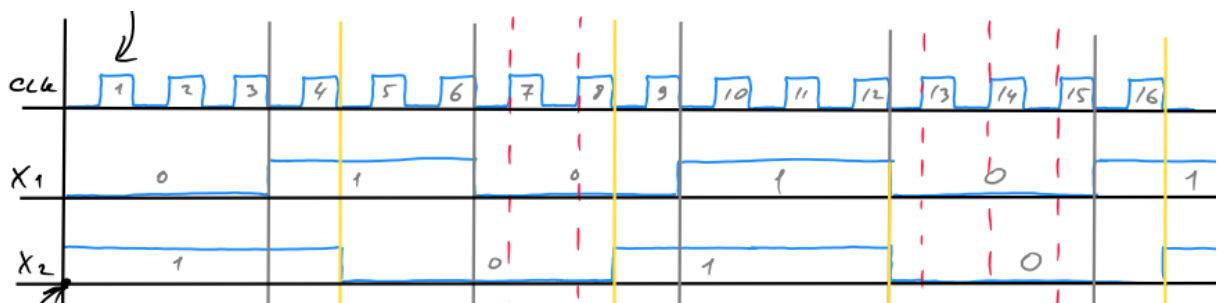
Рис. 2. Временная диаграмма.

Решение:

Схеме эквивалентна формула

$$\overline{X_1 + X_2} * \overline{X_2} * \overline{X_3} = \overline{X_1} * \overline{X_2} * (\overline{X_2} + \overline{X_3})$$

Проанализировав, понимаем что X3 на результат не влияет.



Логическая единица на выходе когда X1=X2=0

| такт | x1 | x2 | Значение на выходе | Ответ |
|------|----|----|--------------------|-------|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 13 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| 14 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 5 |

Ответ: 5

Задача 3 (17 баллов)

На рис. 3 представлена схема термостатирования на основе микросхемы транзисторной матрицы n-p-n типа, все транзисторы располагаются на одном кристалле, установленном в корпус микросхемы. На вход питания подано напряжение $E_{\Pi} = 12,0$ В, общий ток потребления схемы по цепи питания составляет $I_{\Pi} = 10,0$ мА. На вход схемы подано напряжение $U_{ВХ} = 550$ мВ. Путём измерений установлено, что напряжение на эмиттерном переходе транзистора Т2 составляет $U_{ЭБ2} = 584$ мВ, а ток питания операционного усилителя ОУ равен $I_{ОУ} = 1,0$ мА. Сопротивление резистора $R1$ равно 10 кОм. Резисторы $R2$ и $R3$ одинаковые. Определите тепловое сопротивление кристалл-среда корпуса микросхемы транзисторной матрицы $R_{Т}$ если температура окружающей среды равна $T_0 = 25^{\circ}\text{C}$, операционный усилитель считать идеальным, все транзисторы из состава микросхемы транзисторной матрицы считать одинаковыми.

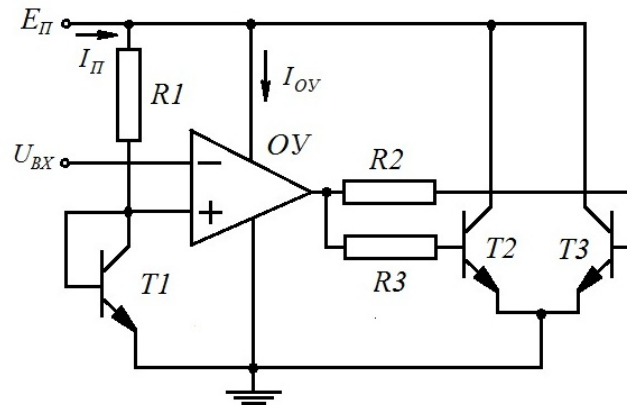


Рис. 3. Схема термостатирования.

Указания:

Считать, что ток коллектора биполярного транзистора I_K определяется следующим соотношением:

$$I_K = I_0 \left(\exp \frac{qU_{ЭБ}}{kT} - 1 \right),$$

где I_0 - обратный тепловой ток коллектора, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $U_{ЭБ}$ - напряжение на переходе эмиттер-база, T – температура, выраженная по шкале Кельвина, эффектом Эрли пренебречь.

Тепловым сопротивлением кристалл-среда корпуса микросхемы называется отношение разности температуры кристалла и окружающей среды к тепловой мощности, выделяющейся кристаллом микросхемы в заданном электрическом режиме.

Считать коэффициенты усиления биполярных транзисторов достаточно большими, а ток базы пренебрежимо малым по сравнению с током коллектора.

Решение:

Поскольку операционный усилитель идеальный, напряжение на неинвертирующем входе относительно земли равно напряжению на инвертирующем входе (правило виртуального нуля), тогда падение напряжение на эмиттерном переходе транзистора T1 равно $U_{ВХ}$, а ток эмиттера транзистора T1 по закону Ома равен:

$$I_{Э1} = (E_{П} - U_{ВХ})/R1. \quad (1)$$

Суммарный ток коллекторов транзисторов T2 и T3 по I закону Кирхгофа равен:

$$I_{К23} = (I_{П} - I_{Э1} - I_{ОУ}). \quad (2)$$

Поскольку резисторы R2 и R3, а так же транзисторы T2 и T3 одинаковые, ток коллектора транзистора T2 равен:

$$I_{К2} = I_{К23}/2 = (I_{П} - (E_{П} - U_{ВХ})/R1 - I_{ОУ})/2. \quad (3)$$

С другой стороны:

$$I_{К2} = I_0 \left(\exp \frac{qU_{ЭБ2}}{kT} - 1 \right). \quad (4)$$

Учитывая, что ток базы транзисторов, в том числе транзистора Т1, много меньше тока коллектора, можно считать, что ток коллектора транзистора Т1 равен:

$$I_{K1} = I_{Э1} = (E_{П} - U_{ВХ})/R1. \quad (5)$$

С другой стороны этот же ток определяется как:

$$I_{K1} = I_0 \left(\exp \frac{qU_{ВХ}}{kT} - 1 \right). \quad (6)$$

Путем деления (6) на (4), пренебрегая единицей по сравнению с экспонентой в скобках получаем:

$$\frac{I_{K1}}{I_{K2}} = \exp \left(\frac{q(U_{ВХ} - U_{ЭБ2})}{kT} \right), \quad (7)$$

откуда температура транзисторной матрицы:

$$T = \frac{q (U_{ВХ} - U_{ЭБ2})}{k \ln \left(\frac{I_{K1}}{I_{K2}} \right)}. \quad (8)$$

Мощность, потребляемая транзисторной матрицей, равна (считаем мощность транзистора Т1 пренебрежимо малой):

$$P = E_{П} \cdot I_{K23} = E_{П} \cdot (I_{П} - I_{Э1} - I_{ОУ}). \quad (9)$$

Считая, что тепловое сопротивление:

$$R_T = (T - T_0)/P, \quad (10)$$

С учетом (3), (5), (8) и (9), окончательно получаем:

$$R_T = \frac{\frac{q}{k} \frac{(U_{ВХ} - U_{ЭБ2})}{2 \cdot \left(\frac{E_{П} - U_{ВХ}}{R1} \right)} - T_0}{\ln \left(\frac{E_{П} - U_{ВХ}}{E_{П} - U_{ВХ} - I_{ОУ} R1} \right)} \cdot \frac{1}{E_{П} \cdot \left(I_{П} - \frac{E_{П} - U_{ВХ}}{R1} - I_{ОУ} \right)}. \quad (11)$$

Подстановка числовых значений дает: $R_T = 232 \text{ } ^\circ\text{C/Вт}$.

Ответ: $R_T = 232 \text{ } ^\circ\text{C/Вт}$.

Задача 4 (17 баллов)

Для изготовления органических светодиодов и солнечных ячеек планарной геометрии необходимо обеспечить высокую прозрачность для оптического излучения одного из электродов. Для этого применяются разные подходы. Один из наиболее элегантных и технологичных заключается в использовании стеклянной или пластиковой (PET) подложки с нанесенным слоем оксида индия-олова (ITO) (рис. 4). ITO является широкозонным легированным полупроводником n-типа, что позволяет обеспечить прозрачность для видимого света и хорошую проводимость. Однако у ITO, как у любого материала есть и свои ограничения.

Оцените границы (в длинах волн) спектрального диапазона прозрачности покрытия из ITO зная, что ширина запрещенной зоны ITO составляет около 4 эВ, а концентрация носителей (электронов) в этом материале находится на уровне $3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

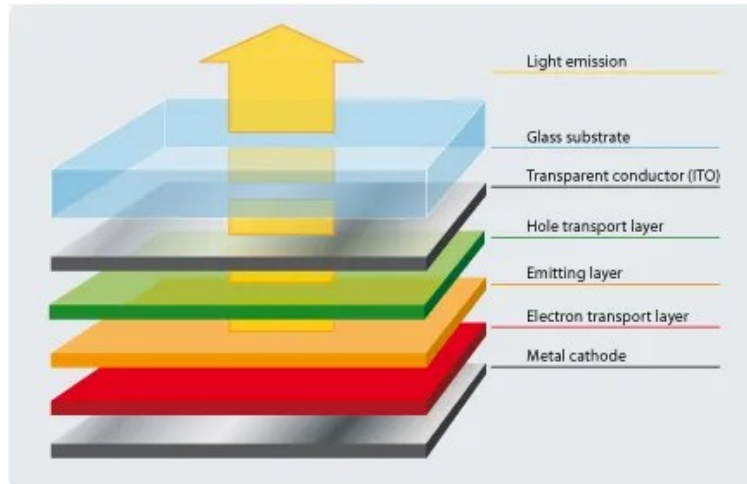
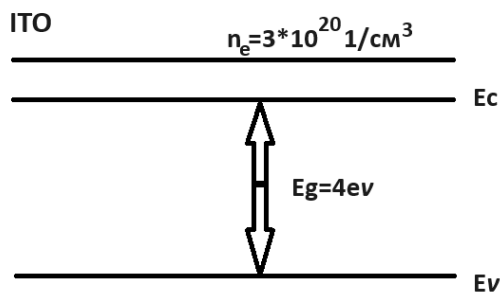


Рис. 4. Общая структура слоёв органического светодиода (OLED).

Решение:



Тогда Диапазон прозрачности:

$$\hbar\omega_{\text{пл}} = \hbar\omega = E_G$$

$$\omega_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \text{ [СГС]}$$

$$! [n] = \frac{1}{\text{см}^3}$$

$$\text{СГС} \quad ! [e] = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}$$

$$! [m_e] = 10^{-27} \text{ г}$$

$$1) \omega_{\text{пл}} = \left[\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{20} \cdot (4,8)^2 \cdot 10^{-20}}{10^{-27}} \right]^{0,5} = 2,9 \cdot 10^{14} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Пропускание света в ITO будет ограничено:

1) Межзонным поглощением света. Если $E_{\text{фотона}} > E_g$.

2) Отражением света при взаимодействии

со свободными носителями.

$$\varepsilon \approx 1 - \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega} \right)^2$$

$$\text{Если } \omega < \omega_{\text{пл}} \Rightarrow \varepsilon < 1$$

$$\Rightarrow n \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow R \rightarrow 1$$

$$\lambda_{\text{пл}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{пл}}} \approx 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 6,5 \text{ мкм}$$

2) $E_g = 4 \text{ эВ}$ Известно для фотонов $\lambda_{\text{мкм}} = \frac{1,24}{E[\text{эВ}]}$
 $\lambda_g = \frac{1,24}{E_g} \approx 0,31 \text{ мкм} \Rightarrow 310 \text{ нм}$

Диапазон прозрачности ИТО $\approx 6,5 \text{ мкм}$ (средний ИК) – 310 нм (УФ).

Задача 5 (23 балла)

В вертикально-излучающих лазерах и других приборах для отражения света используются распределённые брэгговские решётки. Они представляют собой последовательность периодически чередующихся слоёв с отличающимся составом, например, GaAs и AlAs. Показатель преломления для твёрдого раствора $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ зависит от длины волны как показано на рис. 5.

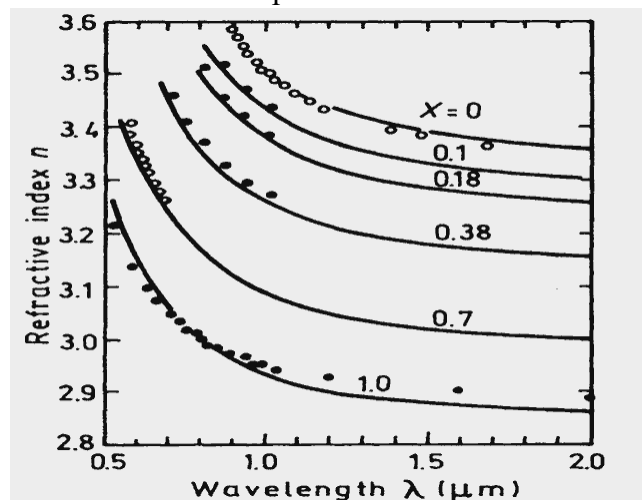


Рис. 5. Зависимость показателя преломления для твёрдого раствора $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ от длины волны оптического излучения в нём и мольной доли x .

Пусть рабочая длина волны составляет $\lambda_0 = 1 \text{ мкм}$.

Определите:

- 1) Толщину d каждого из слоёв GaAs и AlAs при которой каждый из них будет отвечать условию $nd = \lambda_0/4$;
- 2) Коэффициент отражения по мощности брэгговского зеркала, содержащего 10 пар таких слоёв;
- 3) Спектральную ширину $\Delta\lambda$ такой решётки.

Решение:

Будем считать, что решётка граничит с GaAs с одной стороны и с воздухом с другой стороны (так как в задаче эти детали не указаны, принимались любые разумные варианты).

Рассчитаем толщины слоёв:

$$d_{GaAs} = \frac{\lambda_0}{4n_{GaAs}} = \frac{1}{4 \cdot 3.5} = 71 \text{ нм}$$

$$d_{AlAs} = \frac{\lambda_0}{4n_{AlAs}} = \frac{1}{4 \cdot 2.95} = 85 \text{ нм}$$

Важно отметить, что величины $k_{GaAs}d_{GaAs} = k_{AlAs}d_{AlAs} = \frac{\pi}{2}$. Для простоты обозначим AlAs индексом 1, а GaAs индексом 2.

Можно воспользоваться методом матрицы прохождения (transfer matrix), которая связывает значения напряженностей электрического и магнитного поля перед и после прохождения через диэлектрический слой.

$$M = \begin{bmatrix} \cos kd & -\frac{i}{n} \sin kd \\ -in \sin kd & \cos kd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{n} \\ -in & 0 \end{bmatrix}$$

Для двух слоёв получаем:

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} -\frac{n_2}{n_1} & 0 \\ 0 & -\frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Для N пар таких слоёв получаем:

$$(M_1 M_2)^N = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \end{bmatrix}$$

В данном случае амплитудный коэффициент отражения будет:

$$r = \frac{n_l m_{22} - n_r m_{11}}{n_l m_{22} + n_r m_{11}} = \frac{n_l n_1^{2N} - n_r n_2^{2N}}{n_l n_1^{2N} + n_r n_2^{2N}}$$

Где n_l, n_r – показатели преломления слева и справа от стопки слоёв.

Отсюда получаем коэффициент отражения по мощности:

$$R = \left(\frac{n_l n_1^{2N} - n_r n_2^{2N}}{n_l n_1^{2N} + n_r n_2^{2N}} \right)^2 = \left(\frac{n_2 n_1^{20} - n_2^{20}}{n_2 n_1^{20} + n_2^{20}} \right)^2 = 0.63$$

Спектральную ширину найдём из следующих соображений. Так как чётко определённая полоса отражения (соответствующая запрещённой зоне фотонного кристалла) существует только для решётки с бесконечным числом слоёв, воспользуемся этим приближением.

Здесь приведём это выражение без вывода (существует несколько способов его вывести).

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \approx \frac{4 n_2 - n_1}{\pi n_2 + n_1} = 0.109$$

Задача 6 (23 балла)

Нанотранзисторы со структурой металл-диэлектрик-полупроводник (МДПНТ) используются как чувствительные элементы электронных датчиков различных преобразующих величин X . Фрагмент структуры одного из вариантов МДПНТ представлен на рис. 6а. МДПНТ имеет 4 вывода: затвор (1), исток (2), сток (3), подложка (4) и может включаться в электрические схемы (например, как показано на рис. 6б). Согласно упрощённой электрической модели МДПНТ, при напряжении на затворе U_3 , превышающем исходное пороговое значение U_0 , между стоком и истоком протекает ток I_C , значение которого при напряжении между стоком и истоком U_C и $U = U_3 - U_0 > 0$ можно определить как:

$I_C = b \cdot U_C \cdot (U - 0,5U_C)$ при $U_C < U$ (крутая обл. ВАХ);

$I_C = 0,5b \cdot (U)^2$ при $U_C \geq U$ в (пологая обл. ВАХ).

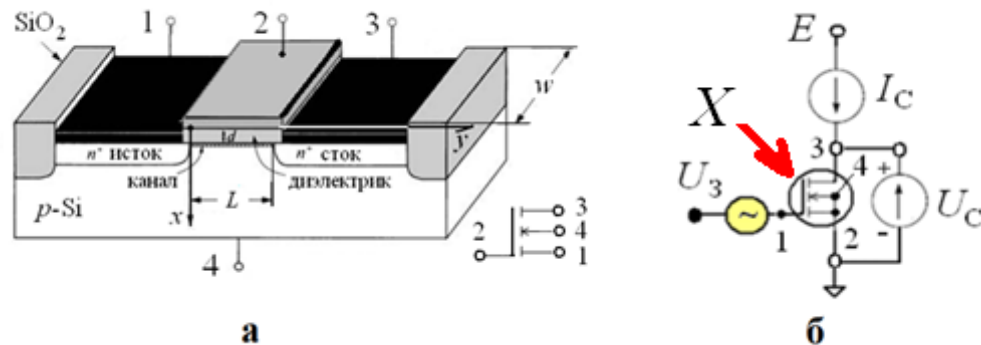


Рис. 6. Фрагмент структуры (а) и вариант схемы включения (б) n -канального МДПНТ.

Длина L и ширина канала w равны 4 мкм и 50 мкм соответственно; толщина подзатворной плёнки $d = 80$ нм; диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 4$; постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; подвижность электронов в канале $\mu = 200$ см²/В·с; $T_0 = 300$ К; исходное пороговое напряжение $U_0 = 0,5$ В; $I_C = 10$ мкА; $U_C = 0,5$ В; инструментальные погрешности измерения напряжения $\Delta(U) = 0,001$ В и $\Delta(X) = 0,01$ у.е.

Определите:

- 1) Удельную ёмкость C_0 и крутизну транзистора $b = \mu w C_0/L$.
- 2) Функцию преобразования $U_3(X)$, если в уравнении (1) значения $\nu = 0,001$ Гц и $Q_m = 90$ нКл/см².
- 3) Границы диапазона преобразования датчика X_0 и X_m , а также минимальную относительную погрешность δX_{\min} в диапазоне преобразования.

Указания:

Чувствительность $S = dU_{\text{вых}}(X)/dX$ большинства датчиков к величине X зависит от процессов изменений эффективного заряда Q в структуре МДП, скорость которых $dQ(t)/dt$ в обобщённом виде можно описать классическим уравнением:

$$dQ(t)/dt = \nu(t) \cdot [Q_m - Q(t)], \quad (1)$$

где $Q(t)$ и Q_m – текущее и максимальное значения плотности заряда, ν – характерная частота (вероятность) заполнения свободных «ловушек» с плотностью, пропорциональной $[Q_m - Q(t)]$. Решения этого дифференциального уравнения зависят от параметров ν и Q_m . При постоянных значениях I_C и U_C выходное напряжение схемы $U_{\text{вых}} = U_3$, функция преобразования датчика $U_3(X) = U_{30} - \Delta U_3(X) = U_{30} - \Delta Q(X)/C_0$, где U_{30} и $C_0 = \epsilon_0 \epsilon / d$ – исходное значение напряжения U_3 и удельная ёмкость затворного диэлектрика соответственно. $[X] = \text{у.е.}$ (условные единицы). Скорость $dX(t)/dt = 0,05 \text{ у.е./с}$.

Решение:

1. Удельные ёмкость C_0 и крутизна транзистора $b = \mu \nu C_0/L$?

Эти параметры одинаковы в **обоих вариантах**:

$$C_0 = \epsilon_0 \epsilon / d = 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} / 80 \cdot 10^{-9} = 0,4425 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/м}^2 \approx 4,43 \cdot 10^{-4} \text{ Ф/м}^2 \approx \underline{\underline{44,3 \text{ нФ/см}^2}} .$$

$$b = \mu \nu C_0/L = 200 \cdot 12,5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с} \cdot 44 \text{ нФ/см}^2 = \underline{\underline{0,11 \text{ МА/В}^2}} .$$

2. Функция преобразования $U_3(X)$, если в уравнении (1) значения $\nu = 0,001 \text{ Гц}$ и $Q_m = 90 \text{ нКл/см}^2$?

Функция преобразования датчика $U_3(X) = U_{30} - \Delta U_3(X) = U_{30} - \Delta Q(X) / C_0$.

Компонента $U_{30} = U(I_C) + U_0$. Определимся с функцией $U(I_C)$, которая зависит от области ВАХ. Для данного МДПНТ ток стока насыщения

$$I_{\text{сн}} = 0,5b \cdot (U)^2 = \mathbf{0,5b \cdot (U_C)^2} = 0,5 \cdot 0,11 (0,5)^2 = 0,0138 \text{ (мА)} \approx \mathbf{14 \text{ мкА}} .$$

Ток $I_C = \mathbf{10 \text{ мкА}} < I_{\text{сн}} = \mathbf{14 \text{ мкА}}$, рабочая точка находится в **пологой** области ВАХ, где

$$U(I_C) = (2I_C / b)^{1/2} = (0,02 / 0,11)^{1/2} = \mathbf{0,426 \text{ (В)}} .$$

$$U_{30} = U(I_C) + U_0 = 0,426 + 0,5 = 0,926 \approx \mathbf{0,93 \text{ (В)}} .$$

Компонента $\Delta Q(X)$ зависит от кинетики изменения заряда $Q(t)$, которая в данной задаче определяется в результате решения уравнения (1) при заданных параметрах ν , Q_m и $dX(t)/dt$. При постоянных значениях ν и Q_m решением уравнения $dQ(t)/dt = \nu(t) \cdot [Q_m - Q(t)]$ является

$$Q(t) = Q_m \cdot [1 - \exp(-\nu \cdot t)] .$$

С учётом скорости $dX/dt = 0,05 \text{ у.е./с}$ получаем $\nu \cdot t = 0,02 \cdot X$ и $Q(X) = 90 \cdot [1 - \exp(-0,02 \cdot X)]$. Тогда

$$U_3(X) = U_{30} - \Delta Q(X) / C_0 = 0,93 - 2,04 \cdot [1 - \exp(-0,02 \cdot X)] \approx \mathbf{0,9 - 2 \cdot [1 - \exp(-0,02 \cdot X)]} .$$

3. Границы диапазона преобразования датчика X_0 и X_m , а также минимальная относительная погрешность $\delta X_{\text{мин}}$ в диапазоне преобразования?

Границы диапазона преобразования датчика определяются как $X_0 = \mathbf{\max\{X_{0i}\}}$ и $X_m = \mathbf{\min\{X_{mi}\}}$, где $\{X_{0i}\}$ и $\{X_{mi}\}$ – совокупности нижних и верхних ограничивающих факторов. Если известна инструментальная погрешность измерения напряжения $\Delta(U) = 0,001 \text{ В}$, то первые ограничивающие факторы можно определить как решения уравнений $\Delta U_3(X_{01}) = \Delta(U)$ и $\Delta U_3(X_{m1}) = \Delta U_{3m} - \Delta(U)$.

$$2,04 \cdot [1 - \exp(-0,02 \cdot X_{01})] = 0,001 \rightarrow X_{01} = \mathbf{0,024 \text{ у.е.}};$$

$$2,04 \cdot [1 - \exp(-0,02 \cdot X_{m1})] = 2,04 - 0,001; \rightarrow X_{m1} = \mathbf{381 \text{ у.е.}}$$

При экспериментальных исследованиях датчиков величина X представляется с учётом абсолютной ΔX и относительной δX погрешностей, которые зависят от чувствительности $S = dU_3(X)/dX$. Реальное значение $X_p = X \pm \Delta X$. Абсолютная погрешность $\Delta X = |\Delta(V)/|S|| \pm \Delta(X)$. Максимальная относительная погрешность

$$\delta X = 100\% \times (\Delta X/X) = 100\% \times [|\Delta(X) \cdot |S| + \Delta(V)| / (X \cdot |S|)], \text{ где чувствительность } S = dU_3(X)/dX.$$

В данной задаче $|S| = 0,02 \cdot Q_m \exp(-0,02 \cdot X)/C_0$ – монотонно убывающая функция от X , а график функции $\delta X(X)$ имеет «U» - образный вид.

Вторые ограничивающие факторы, которые определяют максимально возможный диапазон преобразования датчика, можно определить из решения уравнения $\delta X = 100\%$ (2)

Оценим значения δX при X_{01} и X_{m1}

$$|S| = 0,02 \cdot 90 \exp(-0,02 \cdot X)/44,3 = 0,04 \exp(-0,02 \cdot X); \delta X(X) = (1/X)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot X)];$$

$$\delta X(X_{01}) = (1/X)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot X)] = 1/0,024[1 + 2,5 \cdot (1 + 0,02 \cdot 0,024)] = \mathbf{145 \%}.$$

$$\delta X(X_{m1}) = (1/X)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot X)] = (1/381)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot 381)] = \mathbf{13,4 \%}.$$

Значит $X_{02} > X_{01}$ и $X_{m1} < X_{m2}$. Тогда нужно решать уравнение (2) для малых значений X .

Решим уравнение (2): $\delta X(X) = (1/X)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot X)] = 100.$

Если $X_{02} = X < 0,1$, то $100X \approx 1 + 2,5(1 + 0,02 \cdot X).$

$$100X \approx 1 + 2,5(1 + 0,02 \cdot X) = 3,5 + 0,05 \cdot X \rightarrow X_{02} = 0,035 \text{ у.е. } X_0 = \max\{0,024; 0,035\}.$$

$X_0 = 0,035 \text{ у.е. } X_m = 381 \text{ у.е.}$

$\delta X_{\min} = ?$ Поскольку функция $\delta X(X)$ имеет «U» - образный вид, её минимальное значение δX_{\min} соответствует значению X^* , в которой $d(\delta X)/dX = 0.$

$$d(\delta X)/dX = (-1/X^2)[1 + 2,5 \exp(0,02 \cdot X)] + (1/X) \cdot d[2,5 \cdot \exp(0,02 \cdot X)]/dX = 0.$$

$$d[2,5 \cdot \exp(0,02 \cdot X)]/dX = 0,05 \cdot \exp(0,02 \cdot X);$$

$$0,05 \cdot X \cdot \exp(0,02 \cdot X) - (1 + 2,5 \cdot \exp(0,02 \cdot X)) = 0. \quad 0,05 \cdot X \cdot \exp(0,02 \cdot X) - 1 - 2,5 \cdot \exp(0,02 \cdot X) = 0$$

$$0,05 \cdot X \cdot \exp(0,02 \cdot X) - 1 - 2,5 \cdot \exp(0,02 \cdot X) = 0; \exp(0,02 \cdot X) \cdot (0,05 \cdot X - 2,5) = 1. \quad (0,05 \cdot X - 2,5) > 0.$$

$$X > 2,5/0,05 = 50. \quad \exp(-0,02 \cdot X) = 0,05 \cdot X - 2,5.$$

Численно или графически можно показать, что $X^* = 56 \text{ у.е.}$ и $\delta X_{\min} \approx \mathbf{0,155 \%}.$

Можно разложить функцию $\exp(-0,02 \cdot X)$ в ряд Тейлора в точке $X = 55.$

$$\exp(-0,02 \cdot X) = \exp(-1,1) [1 - (0,02X - 1,1) + 0,5(0,02X - 1,1)^2 \dots]$$

$$0,33[2,1 - 0,02X] \approx 0,05 \cdot X - 2,5 \rightarrow X^* = 56,1 \text{ у.е. } \delta X_{\min} \approx 0,151 \%. \quad \delta X_{\min} \approx \mathbf{0,15 \%}.$$

$\delta X_{\min} \approx 0,15 \%$

Ответы:

| C_0 и b | $U_3(X), \text{ В}$ | $X_0, \text{ у.е.}; X_m, \text{ у.е.}$ и $\delta X_{\min}, \%$ |
|---|-------------------------------------|--|
| 44,4 нФ/см ² и 0,11 мА/В ² | 0,93 – 2,04 · [1 – exp(– 0,02 · X)] | 0,035; 381 и 0,15 |