Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»

задания заключительного этапа
по направлению **«Физика и технологии уникальных научных установок класса «мегасайенс»**
2023-2024 уч.г.

Категория участия: «Бакалавриат»

- Обоснованность выбора формул, законов, физических принципов.
- Наличие/отсутствие ошибок в выводе формул.
- В задачах, требующих нескольких этапов решения, будет проверяться и оцениваться каждый этап.

Вариант 1

Задача 1 **(10 баллов)**
Известно, что для грубых оценок радиационных распадов адронов, вероятность излучить дополнительный фотон равна константе электромагнитных взаимодействий $\alpha \approx 1/137$. Вероятность распада заряженного $K^{\pm}$-мезона по каналу $K^+ \to \pi^+\pi^0$ равна $\mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\pi^0) = (20.67 \pm 0.08)\%$. Оцените вероятность радиационного распада по каналу $K^+ \to \pi^+\gamma$ (т.е. с "заменой" π^0 на фотон).
Решение
Вероятность распада по каналу $K^+ \to \pi^+\gamma$ равна **нулю**.
Действительно, такой распад нарушает калибровочную инвариантность. Введем два независимых импульса

$$p_\gamma = q = p_K - p_\pi, \quad k = p_K + p_\pi$$

Тогда амплитуду распада (T) можно записать с помощью 3-х структур

$$T(K^+ \to \pi^+\gamma) = (f_1 q^\mu + f_2 k^\mu)A_\mu + f_3 k^\mu q^\nu F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = q_\mu A_\nu - q_\nu A_\mu$$

1-е слагаемое дает нулевой вклад ($q^\mu A_\mu = 0$), 2-е слагаемое (($k^\mu A_\mu$) нарушает калибровочную инвариантность. Из-за этого $f_2 = 0$. 3-е слагаемое также дает нулевой вклад:

$$k^\mu q^\nu F_{\mu\nu} = (kq)(Aq) - (Ak)q^2$$

так как $q^\mu A_\mu = 0$ и $q^2 = 0$
Критерии оценивания:
Баллы указаны за варианты решений
— Оценка получена простым умножением типа $\mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\gamma) = \dfrac{1}{137} \times \mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\pi^0)$, где (1/137) константа электромагнитных взаимодействий — **2 балла**;
— Перемножены числа и комментарий типа, "если такой распад существует" — **4 балла**;
— Утверждение, что такого распада не существует. Но, запрет из-за неверной аргументации — **6 баллов**;

— Утверждение, что такого распада не существует. Правильная аргументация, например из-за калибровочной инвариантности. — **10 баллов**;

Задача 2 **(15 баллов)**

В формулы, описывающие выражения для ширины распада или сечения, входит Лоренц-инвариантный фазовый объем, отвечающий n-частицам в конечном состоянии:

$$dR_n(P;\, p_1, p_2, \ldots p_n) = \delta^{(4)}(P - \sum_{j=1}^{n} p_j) \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

где P - 4-импульс начальной системы, а $p_i,\ i = 1, \ldots, n$ - 4-импульсы конечных частиц.

Вычислите полный (т.е. проинтегрированный по все переменным) фазовый объем для случая $n = 2, 3, 5$ частиц в конечном состоянии, при условии, что массы всех конечных частиц равны нулю.

Решение. Запишем искомую величину в виде:

$$R_n = \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \Phi_n$$

Для 2-частиц в конечном состоянии имеем (далее везде “опускаем” знак интеграла):

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \int \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2}, \text{ заметим, что} 1 = \delta(p^2 - m^2) dp^2, \;\; dp^2 = 2EdE \\
\Rightarrow & \quad \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} = \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(p_2^2 - m_2) dp_2^2 = \\
&= \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} (2E_2 dE_2) \delta(p_2^2 - m_2) \\
&= \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) d^4 p_2 \frac{d^3 p_1}{2E_1} \delta(p_2^2 - m_2) = \delta\left((P - p_1)^2 - m_2\right) \frac{d^3 p_1}{2E_1}
\end{aligned}$$

В системе центра масс далее получим (далее $s = P^2$)

$$\Phi_2 = \delta(s - 2\sqrt{s} E_1) \frac{d\phi_1 \, d\cos\theta_1 p_1 E_1 dE_1}{2E_1}$$

Учтем, что по условию задачи, у нас нет выделенного направления. Следовательно, $\int d\phi_1 \, d\cos = 4\pi$.

$$\Phi_2 = 4\pi \delta(s - 2\sqrt{s} E_1) \frac{p_1 dE_1}{2} = \frac{4\pi \cdot p_1}{4\sqrt{s}} = \pi \frac{p_1}{\sqrt{s}}$$

где p_1 - импульс конечной частицы. При $m_1 = 0$ и $m_2 = m > 0$

$$p_1 = \frac{1}{2}(s - m^2)$$

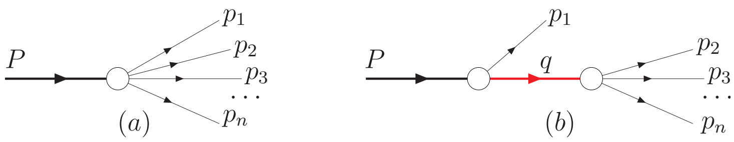
Окончательно, имеем:

$$\Phi_2(m) = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{m^2}{s}) \tag{1}$$

В нашем случае ($m = 0$) получим

$$\Phi_2 = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Далее, легко вычислить фазовый объем для $n = 3, 5$.
Однако, более эффективно сразу же вычислить выражение для n-частичного фазового объема, применяя формулу факторизации фазового объема (см. рисунок (b))



$$\Phi_n = \int d\Phi_2(P;\, p_1, q) dq^2\, d\Phi_{n-1}(q;\, p_2, \ldots p_n), \tag{3}$$

где $q = \sum_{i=2}^{n} p_i$ и $0 \le q^2 \le s$. Из формулы (6) имеем

$$\Phi_2(P;\, p_1, q) = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{q^2}{s})$$

Из размерных соображений, легко получить:

$$\int d\Phi_{n-1}(q;\, p_2, \ldots p_n) = (\pi/2)^{n-2}\, A(n-1)(q^2)^{n-3}$$

где $A(n-1)$ - коэффициент. Теперь имеем

$$\Phi_n = (\pi/2)^{n-1} \int_0^s \left(q^{n-3} - \frac{q^{n-2}}{s}\right) dq^2 = (\pi/2)^{n-1}\, s^{n-2} A(n-1) \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$\Phi_n = (\pi/2)^{n-1}\, A(n) s^{n-2}, \quad A(n) = \frac{A(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

Теперь легко показать (например, методом мат. индукции), что

$$A(n) = \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_n = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} s^{n-2} \tag{4}$$

Окончательно, получим:

$$\Phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_3 = \frac{(\pi/2)^2}{2} s, \quad \Phi_5 = \frac{(\pi/2)^4}{4!3!} s^3$$

Критерии оценивания:
Баллы указаны за варианты решений
— Какие-то формулы — **1 балл**;
— Проведено интегрирование, но все ответы не верные — **2 балла**;
— Правильно вычислен 2-х частичный фазовый объем, остальные неправильные —

8 баллов;
— Полностью правильное решение — **15 баллов**;

Задача 3 **(25 баллов)**
Средняя длина пробега мюона с импульсом 1 ГэВ/с равна 6.32 км, а его основной распад $\mu- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ имеет вероятность 100%. Найти среднюю длину пробега τ-лептона с импульсом 10 ГэВ/с, если вероятность его распада $\tau- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$ равна 17.82%. Массы частиц: $m(\tau) = 1.7769$ ГэВ/с^2, $m(\mu) = 105.66$ МэВ/с^2, $m(e) = 0.511$ МэВ/с^2.
Решение
Найдем время жизни мюона:

$$t_\mu = \frac{L}{c\gamma}, \quad \gamma = \frac{E_\mu}{m_\mu}$$

где, по условию, $L = 6320$ м, $\gamma = 1/0.10566 = 9.5$. Тогда $t_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}$ с.

Ширина распада τ-лептона с массой m_τ на электрон и нейтрино связана с шириной распада $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau\, e^- \bar{\nu}_e) &= \left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \times \Gamma(\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e) \\
\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau\, e^- \bar{\nu}_e) &= \mathsf{Br}(\tau^- \to \nu_\tau\, e^- \bar{\nu}_e) \times \Gamma(\tau^- \to X)
\end{aligned}$$

Отсюда для времени жизни τ-лептона получим:

$$\begin{aligned}
t_\tau &= \frac{1}{\Gamma(\tau^- \to X)} = \mathsf{Br}(\tau^- \to \nu_\tau\, e^- \bar{\nu}_e) \times \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 \times t_\mu \\
&= 0.1782 \times \left(\frac{105.66}{1776.9}\right)^5 \times 2.2 \cdot 10^{-6} = 2.9 \cdot 10^{-13} \ \ c
\end{aligned}$$

что хорошо согласуется данными PDG $2.903 \cdot 10^{-13}$с.

Теперь для искомой средней длине пробега τ-лептона с импульсом 10 ГэВ/с получим:

$$\begin{aligned}
L_\tau &= t_\tau c \gamma_\tau = t_\tau c \frac{E_\tau}{m_\tau} = t_\mu c \cdot \frac{E_\mu}{m_\mu} \times \left(\frac{t_\tau m_\mu E_\tau}{t_\mu E_\mu m_\tau}\right) = L_\mu \times \left(\frac{t_\tau m_\mu E_\tau}{t_\mu E_\mu m_\tau}\right) = \\
&= 6.32 \times \left(\frac{2.9 \cdot 10^{-13} \times 105.66 \times 10.}{2.2 \cdot 10^{-6} \times 1. \times 1776.9}\right) = 7.8 \times 10^{-8} \text{ км} = 0.078 \text{ мм}
\end{aligned}$$

Критерии оценивания:
Баллы указаны за варианты решений
— Правильно использованы преобразования Лоренца (для связи времен жизни мюона или τ-лептона в разных системах отсчета), но использовано НЕВЕРНОЕ предположение о равенстве времен жизни мюона или τ-лептона — **5 баллов**;
— Все формулы правильные, но ошибка в численном ответе — **24 балла**;
— Полностью правильное решение — **25 баллов**;

Задача 4 **(25 баллов)**
В пучке с импульсом 12.5 ГэВ используется газовый черенковский счетчик. Эффективность счетчика для K^+-мезонов полностью определяется статистикой фотоэлектронов и хорошо описывается пороговой зависимостью

$$\varepsilon_K = 1 - \exp\left(-\frac{P - P_0}{\sigma}\right) \ \text{ для } P > P_0$$

Здесь P — давление газа в счетчике в атм.; $P_0 = 1$ атм.; $\sigma = 0.2$ атм. Массы частиц равны: $m_K = 0.49$ ГэВ, $m_\pi = 0.140$ ГэВ, $m_p = 0.938$ ГэВ

Найти: найти параметры пороговой кривой для π^+-мезонов, если счетчик заполнен воздухом ($n_0 - 1 = 2.70 \cdot 10^{-4}$, n_0 - коэффициент преломления при атмосферном давлении).

Решение: Эффективность счетчика $\varepsilon = 1 - e^{-\nu_\phi}$, где ν_ϕ - число фотоэлектронов. Согласно теории Черенковского излучения, число фотоэлектронов $\nu_\phi = a \cdot \ell \cdot \sin^2\theta$, θ - черенковский угол, ℓ - длина радиатора, a - коэффициент ($a \sim 90$ для хороших счетчиков).

Угол θ определяется из условия $\cos\theta = 1/n\beta$, n - коэффициент преломления, β - скорость частицы (v/c). $n-1$ для газа мало и его зависимость от давления можно описывать линейной функцией $n-1 = P\cdot(n_0-1)$, P -давление газа в атм. Все частицы можно считать релятивистскими, $\beta = p?e \sim 1 - m^2/2p^2$. При этих предположениях получаем:

$$\cos\theta = 1 + \frac{m^2}{2p^2} - (n_0-1)\cdot P, \quad \sin^2\theta = 2\cdot(n_0-1)\cdot P - \frac{m^2}{p^2}$$

Учитывая, что пороговое давление, при котором

$$\cos\theta = 1, \quad P_0 = \frac{m^2}{2p^2(n_0-1)},$$

получаем

$$\sin^2\theta = 2\cdot(n_0 1 - 1)\cdot(P - P_0), \quad \varepsilon = 1 - \exp[-2a\ell(n_0-1)(O-P_0)], \quad \sigma = \frac{1}{2a\ell(n_0-1)}$$

Теперь из условия задачи получаем, что счетчик был первоначально наполнен газом с $n_0 - 1 = \dfrac{m_K^2}{2p^2P_0} = \dfrac{0.49^2}{2\cdot 12.5^2\cdot 1} = 7.68\cdot 10^{-4}$ (SF_6 - эле-газ)

Для π-мезона и воздуха имеем:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{m_\pi^2}{2p^2(n_0-1)} = \frac{0.140^2}{2\cdot 12.5^2 \times 2.7\cdot 10^{-4}} = 0.23 \text{ атм.} \\ \sigma &= \frac{1}{2a\cdot 1(n_0-1)} = \frac{0.2\cdot 7.68}{2.7} = 0.57 \text{ атм.} \end{aligned}$$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с "нарастающим итогом"

— Приведена формула $\cos\theta = 1/(n\beta$ и пороговое значение β — **3 балла**;

Выписана зависимость n от P — **5 баллов**;

Приведена формула $P_0 = m^2/2p^2(n_0-1)$, определен параметр P_0 — **5 баллов**;

Приведена формула $v_\text{ф} = a\cdot l\cdot \sin^2\theta$ — **5 баллов**;

Приведена формула $\sigma = 1/2a\cdot l(n_0-1)$, определен параметр σ — **7 баллов**;

Задача 5 **(25 баллов)**

Для достижения термоядерного «зажигания» в токамаке Т-14 использовалось адиабатическое обжатие плазмы быстро нарастающим магнитным полем. За счет сохранения магнитного потока через сечение плазменного шнура при резком увеличении

тороидального поля $B_{\text{Т}}$ с 2 до 13 Тл шнур сжимался по малому радиусу тора a, а затем по большому радиусу R в результате повышения вертикального поля $B_\perp$ с 0.5 до 1 Тл. Найдите температуру плазмы после такого комбинированного сжатия, если ее начальная температура $T_0 = 3\,$кэВ. При расчетах учитывайте, что тороидальное магнитное поле в токамаке неоднородно и убывает по большому радиусу тора по закону $B_{\text{Т}} = const/R$. Температуру ионов и электронов считать одинаковой.
Указание: Плазму при высоких температурах можно считать смесью идеальных газов — ионного и электронного.

Решение: Так как сжатие адиабатическое, первое начало термодинамики имеет вид $\delta Q = 0 = dU + PdV$, где P — давление плазмы, а V — объем плазменного шнура. Считая, что плазма представляет собой смесь двух одноатомных газов — электронного и ионного, каждый из которых содержит N частиц и имеет температуру T — внутренняя энергия плазмы равна $U = 3NT$ (температура измеряется в килоэлектронвольтах). Тогда, используя уравнение состояния идеального газа, запишем

$$3NdT = dU = -PdV = -PV\frac{dV}{V} = -2NT\frac{dV}{V},$$

откуда

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V}.$$

Объем тора равен $V = 2\pi^2 Ra^2$, где R — большой радиус тора, а a — малый радиус. Дифференцируя, находим относительное изменение объема

$$\frac{dV}{V} = \frac{dR}{R} + 2\frac{da}{a}.$$

Чтобы найти относительные изменения радиусов, воспользуемся сохранением потока тороидального магнитного поля B_{tor} через полоидальное сечение плазменного шнура,

$$B_{\text{tor}}(R)S_p = B_T \cdot \frac{\pi a^2}{R} = const,$$

где учтена зависимость B_{tor} от R в виде B_T/R. Аналогично, при увеличении вертикального поля сохраняется поток через плазменное кольцо площадью $S_{\text{ring}} = \pi(R+a)^2 - \pi(R-a)^2 = \pi \cdot 2R \cdot 2a$, т.е.

$$B_\perp S_{\text{ring}} = B_\perp \cdot 4\pi Ra = const.$$

Дифференцируя оба равенства, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dB_T}{B_T} + 2\dfrac{da}{a} - \dfrac{dR}{R} = 0, \\ \dfrac{dB_\perp}{B_\perp} + \dfrac{da}{a} + \dfrac{dR}{R} = 0, \end{cases}$$

решения которой дают

$$3\frac{da}{a} = -\frac{dB_T}{B_T} - \frac{dB_\perp}{B_\perp}$$

и

$$3\frac{dR}{R} = \frac{dB_T}{B_T} - 2\frac{dB_\perp}{B_\perp}.$$

Отсюда легко находим изменение объема dV/V, что позволяет получить связь температуры с магнитным полем

$$\frac{9}{2}\frac{dT}{T} = \frac{dB_T}{B_T} + 4\frac{dB_\perp}{B_\perp}. \tag{5}$$

Интегрирование этого уравнения дает закон адиабаты $T/(B_T B_\perp^4)^{2/9} = const$, из которого получаем конечный ответ.

Ответ: $T = T_0 \left(\frac{B_\mathrm{T} B_\perp^4}{B_\mathrm{T0} B_{\perp 0}^4}\right)^{2/9} \simeq 8.4\,$кэВ

Баллы указаны с "нарастающим итогом"

Критерии оценивания:

— Сформулировано 1-е начало термодинамики — **3 балла**;

— Написан закон сохранения потока тороидального магнитного поля с учетом неоднородности по большому радиусу — **5 баллов**;

— Написан закон сохранения потока вертикального магнитного поля — **4 балла**;

— Получено уравнение адиабаты для температуры при комбинированном сжатии плазмы в магнитном поле — **9 баллов**;

— Получен верный численный ответ — **4 балла**.

Вариант 2

Задача 1 **(10 баллов)**
Известно, что для грубых оценок радиационных распадов адронов, вероятность излучить дополнительный фотон равна константе электромагнитных взаимодействий $\alpha \approx 1/137$. Вероятность распада заряженного $K^{\pm}$-мезона по каналу $K^+ \to \pi^+\gamma\gamma$ равна $\mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\gamma\gamma) = (1.01 \pm 0.06) \cdot 10^{-6}$. Оцените вероятность радиационного распада по каналу $K^+ \to \pi^+\gamma$
Решение
Вероятность распада по каналу $K^+ \to \pi^+\gamma$ равна **нулю**.
Действительно, такой распад нарушает калибровочную инвариантность. Введем два независимых импульса

$$p_\gamma = q = p_K - p_\pi, \quad k = p_K + p_\pi$$

Тогда амплитуду распада (T) можно записать с помощью 3-х структур

$$T(K^+ \to \pi^+\gamma) = (f_1 q^\mu + f_2 k^\mu)A_\mu + f_3 k^\mu q^\nu F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = q_\mu A_\nu - q_\nu A_\mu$$

1-е слагаемое дает нулевой вклад ($q^\mu A_\mu = 0$), 2-е слагаемое (($k^\mu A_\mu$) нарушает калибровочную инвариантность. Из-за этого $f_2 = 0$. 3-е слагаемое также дает нулевой вклад:

$$k^\mu q^\nu F_{\mu\nu} = (kq)(Aq) - (Ak)q^2$$

так как $q^\mu A_\mu = 0$ и $q^2 = 0$ **Критерии оценивания**:
Баллы указаны за варианты решений
— Оценка получена простым умножением типа $\mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\gamma) = \frac{1}{\alpha}\mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\gamma\gamma) = \mathsf{Br}(K^+ \to \pi^+\gamma\gamma) \times 137$, где $\alpha = 1/(1/137)$ константа электромагнитных взаимодействий — **2 балла**;
— Перемножены числа и комментарий типа, "если такой распад существует" — **4 балла**;
— Утверждение, что такого распада не существует. Но, запрет из-за неверной аргументации — **6 баллов**;
— Утверждение, что такого распада не существует. Правильная аргументация, например из-за калибровочной инвариантности. — **10 баллов**;

Задача 2 **(15 баллов)**
В формулы, описывающие выражения для ширины распада или сечения, входит Лоренц-инвариантный фазовый объем, отвечающий n-частицам в конечном состоянии:

$$dR_n(P; p_1, p_2, \dots p_n) = \delta^{(4)}(P - \sum_{j=1}^{n} p_j) \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$$

где P - 4-импульс начальной системы, а p_i, $i = 1, \dots, n$ - 4-импульсы конечных частиц.
Вычислите полный (т.е. проинтегрированный по все переменным) фазовый объем

для случая $n = 2, 6$ частиц в конечном состоянии, при условии, что массы всех конечных частиц равны нулю.
Решение. Запишем искомую величину в виде:

$$R_n = \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \Phi_n$$

Для 2-частиц в конечном состоянии имеем (далее везде "опускаем" знак интеграла):

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \int \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2}, \text{ заметим, что} 1 = \delta(p^2 - m^2) dp^2, \;\; dp^2 = 2EdE \\
\Rightarrow \quad & \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} = \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(p_2^2 - m_2) dp_2^2 = \\
&= \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 p_2}{2E_2} (2E_2 dE_2) \delta(p_2^2 - m_2) \\
&= \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) d^4 p_2 \frac{d^3 p_1}{2E_1} \delta(p_2^2 - m_2) = \delta\left((P - p_1)^2 - m_2\right) \frac{d^3 p_1}{2E_1}
\end{aligned}$$

В системе центра масс далее получим (далее $s = P^2$)

$$\Phi_2 = \delta(s - 2\sqrt{s} E_1) \frac{d\phi_1 \, d\cos\theta_1 p_1 E_1 dE_1}{2E_1}$$

Учтем, что по условию задачи, у нас нет выделенного направления. Следовательно, $\int d\phi_1 \, d\cos = 4\pi$.

$$\Phi_2 = 4\pi\delta(s - 2\sqrt{s} E_1) \frac{p_1 dE_1}{2} = \frac{4\pi \cdot p_1}{4\sqrt{s}} = \pi \frac{p_1}{\sqrt{s}}$$

где p_1 - импульс конечной частицы. При $m_1 = 0$ и $m_2 = m > 0$

$$p_1 = \frac{1}{2}(s - m^2)$$

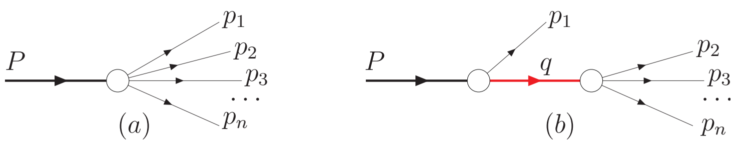
Окончательно, имеем:

$$\Phi_2(m) = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{m^2}{s}) \tag{6}$$

В нашем случае ($m = 0$) получим

$$\Phi_2 = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Далее, легко вычислить фазовый объем для $n = 3, 5$.
Однако, более эффективно сразу же вычислить выражение для n-частичного фазового объема, применяя формулу факторизации фазового объема (см. рисунок (b))



$$\Phi_n = \int d\Phi_2(P;\, p_1, q) dq^2\, d\Phi_{n-1}(q;\, p_2, \ldots p_n), \tag{8}$$

где $q = \sum_{i=2}^{n} p_i$ и $0 \le q^2 \le s$. Из формулы (6) имеем

$$\Phi_2(P;\, p_1, q) = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{q^2}{s})$$

Из размерных соображений, легко получить:

$$\int d\Phi_{n-1}(q;\, p_2, \ldots p_n) = (\pi/2)^{n-2}\, A(n-1)(q^2)^{n-3}$$

где $A(n-1)$ - коэффициент. Теперь имеем

$$\Phi_n = (\pi/2)^{n-1} \int_0^s \left(q^{n-3} - \frac{q^{n-2}}{s}\right) dq^2 = (\pi/2)^{n-1}\, s^{n-2} A(n-1) \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right]$$
$$\Phi_n = (\pi/2)^{n-1}\, A(n) s^{n-2}, \qquad A(n) = \frac{A(n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

Теперь легко показать (например, методом мат. индукции), что

$$A(n) = \frac{1}{(n-1)!(n-2)!}$$
$$\Rightarrow \qquad \Phi_n = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} s^{n-2} \tag{9}$$

Окончательно, получим:

$$\Phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_6 = \frac{(\pi/2)^4}{5!4!} s^3$$

Критерии оценивания:
Баллы указаны за варианты решений
— Какие-то формулы — **1 балл**;
— Проведено интегрирование, но все ответы не верные — **2 балла**;
— Правильно вычислен 2-х частичный фазовый объем, остальные неправильные — **8 баллов**;
— Полностью правильное решение — **15 баллов**;

Задача 3 **(25 баллов)**
Один кубометр реликтового излучения имеет энергию $E = 4.17 \times 10^{-14}$ Дж. **Какую энергию** получает от него Земля за сутки? Радиус Земли 6400 км.
Решение
Поток энергии излучения абсолютно черного тела (АЧТ) дается формулой

$$\Phi = \sigma T^4\ , \tag{10}$$

где $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Вт/м^2/К^4 — постоянная Стефана-Больцмана, однако, нам не потребуется численное значение этой величины. Энергия, полученная Землей за сутки равна

$$Q = \Phi\ 4\pi^2 R\, \tau\ , \tag{11}$$

где $\tau = 8.64 \cdot 10^4$ с — продолжительность суток. При этом известна плотность энергии

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = 4.17 \cdot 10^{-14} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \ . \tag{12}$$

Формула же для плотности энергии излучения АЧТ имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{4}{c}\Phi. \tag{13}$$

Комбинируя вышеприведенные формулы, получаем

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi R^2 c t E}{V} \qquad (14) \\ &\approx 3.14 \cdot (6.4 \times 10^6)^2 \cdot 3 \times 10^8 \cdot 8.64 \times 10^4 \cdot 4.17 \times 10^{-14} \text{ Дж} \approx 1.4 \times 10^{14} \text{ Дж} \end{aligned}$$

Ответ: 1.4×10^{14}**Дж. Правильным считать ответ в интервале** $\left[1.3 \times 10^{14};\ 1.5 \times 10^{14}\right.$ **Дж.**

Примечание: дополнительный множитель 4 в формуле для плотности энергии объясняется следующим образом.

Рассмотрим часть пространства, равномерно заполненную изотропным излучением АЧТ.

Плотность энергии излучения АЧТ определяется так:

$$\varepsilon = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu J(T, \nu) \tag{15}$$

где $J(T,\nu)d\Omega = J(T,\nu)\sin\theta \, d\theta \, d\phi$ - плотность энергии излучения с волновыми векторами в объеме $\nu^2 \, d\nu \, d\phi \, \sin\theta \, d\theta$.

Рассмотрим энергию, проходящую через плоскую площадку dS за время τ. Излучение на частоте ν, идущее в направлении (θ, ϕ) и проходящее через площадку dS за время τ имеет фазовый объем $dSc\tau\nu^2 d\nu \cos\theta \sin\theta d\phi$; интегрируя, получим

$$\Phi \, \tau \, dS = \tau \, dS \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu J(T,\nu) = \frac{1}{4} \varepsilon \, c \, \tau \, dS \ , \tag{16}$$

откуда следует формула (13). Множитель $\cos\theta$ учитывает тот факт, что по направлениям, имеющим угол θ с нормалью к площадке, поток излучения, идущий от данной площадки, слабее, чем поток, идущий вдоль нормали.

Критерии оценивания

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Понимание физического механизма, лежащего в основе решения задачи — **4 балла**
- Знание необходимого для решения задачи соотношения между характеристиками излучения — **8 баллов**
- Аккуратный вывод этого соотношения исходя из определения используемых величин (как в приложении, см. ниже) — **11 баллов**

- Правильный численный ответ — **2 балла**
- Итого — **25 баллов**

Задача 4 **(25 баллов)**
В пучке с импульсом 12.5 ГэВ используется газовый черенковский счетчик. Эффективность счетчика для K^+-мезонов полностью определяется статистикой фотоэлектронов и хорошо описывается пороговой зависимостью

$$\varepsilon_K = 1 - \exp\left(-\frac{P - P_0}{\sigma}\right) \text{ для } P > P_0$$

Здесь P — давление газа в счетчике в атм.; $P_0 = 1$ атм.; $\sigma = 0.2$ атм. Массы частиц равны: $m_K = 0.49$ ГэВ, $m_\pi = 0.140$ ГэВ, $m_p = 0.938$ ГэВ
Найти: найти параметры пороговой кривой для протонов с импульсом 18 ГэВ, если счетчик заполнен CO_2 ($n_0 - 1 = 4.10 \cdot 10^{-4}$, n_0 - коэффициент преломления при атмосферном давлении).
Решение: Эффективность счетчика $\varepsilon = 1 - e^{-\nu_\phi}$, где ν_ϕ - число фотоэлектронов. Согласно теории Черенковского излучения, число фотоэлектронов $\nu_\phi = a \cdot \ell \cdot \sin^2\theta$, θ - черенковский угол, ℓ - длина радиатора, a - коэффициент ($a \sim 90$ для хороших счетчиков).

Угол θ определяется из условия $\cos\theta = 1/n\beta$, n - коэффициент преломления, β - скорость частицы (v/c). $n-1$ для газа мало и его зависимость от давления можно описывать линейной функцией $n-1 = P\cdot(n_0-1)$, P -давление газа в атм. Все частицы можно считать релятивистскими, $\beta = p?e \sim 1 - m^2/2p^2$. При этих предположениях получаем:

$$\cos\theta = 1 + \frac{m^2}{2p^2} - (n_0 - 1)\cdot P, \;\; \sin^2\theta = 2\cdot(n_0 - 1)\cdot P - \frac{m^2}{p^2}$$

Учитывая, что пороговое давление, при котором

$$\cos\theta = 1, \;\; P_0 = \frac{m^2}{2p^2(n_0 - 1)},$$

получаем

$$\sin^2\theta = 2\cdot(n_0 1 - 1)\cdot(P - P_0), \;\; \varepsilon = 1 - \exp[-2a\ell(n_0-1)(O - P_0)], \;\; \sigma = \frac{1}{2a\ell(n_0 - 1)}$$

Теперь из условия задачи получаем, что счетчик был первоначально наполнен газом с $n_0 - 1 = \dfrac{m_K^2}{2p^2P_0} = \dfrac{0.49^2}{2\cdot 12.5^2\cdot 1} = 7.68\cdot 10^{-4}$ (SF_6 - эле-газ)
Для протонов 18 ГэВ и CO_2 имеем:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{m_p^2}{2p^2(n_0-1)} = \frac{0.938^2}{2\cdot 18^2 \times 4.1\cdot 10^{-4}} = 3.3 \text{ атм.} \\ \sigma &= \frac{1}{2a\cdot 1(n_0-1)} = \frac{0.2\cdot 7.68}{4.1} = 0.27 \text{ атм.} \end{aligned}$$

Критерии оценивания:
Баллы указаны с “нарастающим итогом”

— Приведена формула $\cos\theta = 1/(n\beta$ и пороговое значение β — **3 балла**;
Выписана зависимость n от P — **5 баллов**;
Приведена формула $P_0 = m^2/2p^2(n_0 - 1)$, определен параметр P_0 — **5 баллов**;
Приведена формула $v_{\text{ф}} = a \cdot l \cdot \sin^2\theta$ — **5 баллов**;
Приведена формула $\sigma = 1/2a \cdot l(n_0 - 1)$, определен параметр σ — **7 баллов**;

Задача 5 **(25 баллов)**

Для достижения термоядерного «зажигания» в токамаке Т-14 использовалось адиабатическое обжатие плазмы быстро нарастающим магнитным полем. За счет сохранения магнитного потока через сечение плазменного шнура при резком увеличении тороидального поля B_{T} с 2 до 13 Тл шнур сжимался по малому радиусу тора a, а затем по большому радиусу R в результате повышения вертикального поля $B_\perp$ с 0.5 до 1 Тл. Найдите давление плазмы после такого комбинированного сжатия, если ее исходное давление $P_0 = 0.23$ атм. При расчетах учитывайте, что тороидальное магнитное поле в токамаке неоднородно и убывает по большому радиусу тора по закону $B_{\text{T}} = const/R$. Температуру ионов и электронов считать одинаковой. *Указание: Плазму при высоких температурах можно считать смесью идеальных газов — ионного и электронного.*

Решение: Так как сжатие адиабатическое, первое начало термодинамики имеет вид $\delta Q = 0 = dH + VdP$, где P — давление плазмы, а V — объем плазменного шнура. Считая, что плазма представляет собой смесь двух одноатомных газов — электронного и ионного, каждый из которых содержит N частиц и имеет температуру T — энтальпия плазмы равна $H = 5NT$ (температура измеряется в килоэлектронвольтах). Тогда

$$5NdT = dH = -VdP = -PV\frac{dP}{P}.$$

Чтобы выразить левую часть через переменные (P, V), учтем, что изменение внутренней энергии $dU = 3NdT$ при адиабатическом сжатии равно работе внешних сил против давления плазмы $dU = -PdV$. Таким образом,

$$\frac{dP}{P} = -\frac{5}{3}\frac{dV}{V}.$$

Объем тора равен $V = 2\pi^2 Ra^2$, где R — большой радиус тора, а a — малый радиус. Дифференцируя, находим относительное изменение объема

$$\frac{dV}{V} = \frac{dR}{R} + 2\frac{da}{a}.$$

Чтобы найти относительные изменения радиусов, воспользуемся сохранением потока тороидального магнитного поля B_{tor} через полоидальное сечение плазменного шнура,

$$B_{\text{tor}}(R)S_p = B_T \cdot \frac{\pi a^2}{R} = const,$$

где учтена зависимость B_{tor} от R в виде B_T/R. Аналогично, при увеличении вертикального поля сохраняется поток через плазменное кольцо площадью $S_{\text{ring}} = \pi(R + a)^2 - \pi(R - a)^2 = \pi \cdot 2R \cdot 2a$, т.е.

$$B_\perp S_{\text{ring}} = B_\perp \cdot 4\pi Ra = const.$$

Дифференцируя оба равенства, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dB_T}{B_T} + 2\dfrac{da}{a} - \dfrac{dR}{R} = 0, \\ \dfrac{dB_\perp}{B_\perp} + \dfrac{da}{a} + \dfrac{dR}{R} = 0, \end{cases}$$

решения которой дают

$$3\frac{da}{a} = -\frac{dB_T}{B_T} - \frac{dB_\perp}{B_\perp}$$

и

$$3\frac{dR}{R} = \frac{dB_T}{B_T} - 2\frac{dB_\perp}{B_\perp}.$$

Отсюда легко находим изменение объема dV/V, что позволяет получить связь давления с магнитным полем

$$\frac{9}{5}\frac{dP}{P} = \frac{dB_T}{B_T} + 4\frac{dB_\perp}{B_\perp}. \tag{17}$$

Интегрирование этого уравнения дает закон адиабаты $P/(B_T B_\perp^4)^{5/9} = const$, из которого получаем конечный ответ.

Ответ: $P = P_0 \left(\frac{B_\text{T} B_\perp^4}{B_{\text{T}0} B_{\perp 0}^4}\right)^{5/9} \simeq 3.04\,\text{атм}.$

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

Критерии оценивания:
— Сформулировано 1-е начало термодинамики — **3 балла**;
— Написан закон сохранения потока тороидального магнитного поля с учетом неоднородности по большому радиусу — **5 баллов**;
— Написан закон сохранения потока вертикального магнитного поля — **4 балла**;
— Получено уравнение адиабаты для давления при комбинированном сжатии плазмы в магнитном поле — **9 баллов**;
— Получен верный численный ответ — **4 балла**.

Категория участия: для поступающих в аспирантуру/ординатуру

Вариант 1

Задача 1 **(4 балла)**
На будущем адронном коллайдере при столкновении протонов с энергией 100 ТэВ + 100 ТэВ планируется поиск нового скалярного бозона Y с массой $500 \div 1000$ ГэВ /с в инклюзивной реакции

$$p + p \to Y + X$$

с последующим распадом Y на два γ-кванта ($Y \to \gamma\gamma$). В планируемом сеансе работы ускорителя будут выделяться события, при которых бозон Y будет рождаться с небольшим (практически нулевым) поперечным импульсом относительно оси столкновения ($p_\perp(Y) \ll m(Y)$) **Найти** форму распределение фотонов по поперечному импульсу. **Возможно ли** из формы распределения что-либо узнать о величине массы бозона ?

Решение.
При лоренцевских преобразованиях вдоль оси столкновений поперечный импульс (перпендикулярная к этой оси компонента импульса) не меняется. Поэтому, далее решаем задачу в системе покоя Y-бозона.

По условию, спин Y-бозона равен нулю. Следовательно, распределение продуктов распада в этой системе изотропно:

$$\frac{dN}{d\Omega} = const, \quad d\Omega = d\phi\, d\cos\theta$$

так как поперечный импульс ($p_\perp = |\vec{p}_\perp|$) не зависит от азимутального угла, то

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \int \frac{dN}{d\Omega} d\phi = const$$

В системе покоя бозона имеем $p_\perp = \dfrac{m}{2}\sin\theta$. Теперь имеем:

$$p_\perp = \frac{m}{2}\sin\theta \quad \to \quad dp_\perp = \frac{m}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dN}{dp_\perp} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \frac{4p_\perp}{m\sqrt{m^2 - 4p_\perp^2}}$$

Из значения “резкого” пика имеем

$$p_\perp(\max) = \frac{m}{2}$$

Критерии оценки:
Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Получена верная формула, описывающая распределение фотонов (т.е. числа событий) по поперечному импульсу фотона — **3 балла**
- Указано, что из положения максимума можно получить значение массы бозона — **1 балл**

Задача 2 **(17 баллов)**
В нейтринном эксперименте NOvA используется схема “off axis” для формирования пучка нейтрино. Первичный 120 ГэВ протонный пучок попадает в мишень, в которой образуются вторичные $\pi^{\pm}$-мезоны, из которых формируется квази-параллельный пучок, направленный вдоль оси протонного пучка. Мезоны распадаются в вакуумированном распадном канале на $\mu\nu$. Нейтринная установка NOvA расположена на расстоянии $\sim$ 800 км от места образования нейтрино на оси, повернутой на угол 14.6 мрад относительно оси распадного канала.
Считая, что π-мезоны являются единственным источником нейтрино и распределены по энергии в интервале 0 − 30 ГэВ, **найти** максимальную энергию нейтрино на установке NOvA.
$m_\pi = 139.5$ МэВ, $m_\mu = 105$ МэВ
Решение
Запишем преобразование Лоренца для нейтрино: имеем

$$E_\nu^* = \gamma E_\nu (1 - \beta\cos\theta) = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

Здесь E_ν, E_ν^* - энергии нейтрино в лаб. системе и в системе покоя π-мезона, $\gamma = E_\pi/m_\pi$, $\beta = v_\pi/c$. Отсюда

$$E_\nu = \frac{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}{2\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

В релятивистском пределе и в пределе малого угла θ имеем:

$$E_\nu = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)E_\pi}{1 + \gamma^2\theta^2}$$

Энергия нейтрино растет при малых E_π, а затем начинает падать.
Найдем максимальную энергию из условия $dE_\nu/dE_\pi = 0$

$$\frac{dE_\nu}{dE_\pi} = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)(1 - \gamma^2\theta^2)}{1 + \gamma^2\theta^2} = 0$$

$$\to \qquad \gamma = \frac{1}{\theta},\ E_\pi = \frac{m_\pi}{\theta},\ \ E_\nu^{max} = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi}{20} = 2.0 \text{ ГэВ}$$

Критерии оценивания:
Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Выписана формула $\gamma E_\nu(1 - \beta\cos\theta) = E_\nu^* = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ — **5 баллов**
- Выписано условие dE_ν/dE_π или $dE_\nu d\beta$ — **2 балла**
- Получена формула $E_\nu^{max} = (1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi/2\theta$ — **8 баллов**
- Правильный численный ответ — **2 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 3 **(17 баллов)**
Оценить минимальную кинетическую энергию ядра углерода-12, налетающего на ядро ^{244}Pu, при которой возможна его когерентная диссоциация (т.е. развал при сохранении ядра-мишени) на три альфа-частицы. Массы ядер: углерода-12 11,1745 ГэВ, плутония-244 227,2890 ГэВ, гелия-4 - 3,7273 ГэВ Радиус ядра считать равным $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, где $R_0 = 1.2$ фм.
Решение

0.1 Первый вариант решения.

Когерентная диссоциация возможна, если переданный импульс меньше минимального импульса частицы, локализованной внутри ядра $q_{min} \equiv q \simeq \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_0 A^{1/3}} = 26,3$ МэВ. Минимальная энергия, при которой происходит когерентная диссоциация ^{12}C в системе мишени (^{244}Pu) достигается при условии, что импульсы образовавшихся $\alpha-$частиц равны. В силу большой массы ^{244}Pu, можно пренебречь энергией, передаваемой этому ядру. Поэтому 4-импульсы углерода и α-частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(^{12}C) &= (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - M^2})\ , \\ p(3\alpha) &= (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - 9M_\alpha^2})\ , \end{aligned} \tag{18}$$

где M – масса ядра углерода-12, M_α – масса ядра гелия-4, $E = M + T$ – энергия ^{12}C, T - искомая кинетическая энергия. Тогда условие когерентной диссоциации запишется в виде

$$\sqrt{E^2 - M^2} - \sqrt{E^2 - 9M_\alpha^2} = q, \tag{19}$$

или

$$\sqrt{2MT + T^2} - \sqrt{2MT + T^2 - \mu^2} = q, \tag{20}$$

где $\mu^2 = 9M_\alpha^2 - M^2 \approx 0.163$ ГэВ^2 . Дальнейшие алгебраические преобразования можно выполнить следующим образом:

$$\begin{aligned} 2T^2 + 4MT - \mu^2 - q^2 &= 2\sqrt{(2MT + T^2)(2MT + T^2 - \mu^2)}\ , \quad (21) \\ \left(T^2 + 2MT - \frac{\mu^2 + q^2}{2}\right)^2 &= (2MT + T^2)^2 - \mu^2(2MT + T^2)\ , \\ -(T^2 + 2MT)(\mu^2 + q^2) + \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4} &= -\mu^2(2MT + T^2)\ , \\ T^2 + 2MT &= \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4q^2}\ . \end{aligned}$$

Только положительный корень получившегося квадратного уравнения имеет смысл:

$$T = M\left(\sqrt{1 + \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4M^2 q^2}} - 1\right) \approx 420 \text{ МэВ}\ . \tag{22}$$

Ответ: 415 МэВ. Правильным считать ответ в интервале [200; 500] МэВ.

0.2 Второй вариант решения.

Когерентная диссоциация возможна, если переданный импульс меньше минимального импульса частицы, локализованной внутри ядра $q_{min} \equiv q \simeq \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 A^{1/3}} = 26,3$ МэВ. Минимальная энергия, при которой происходит когерентная диссоциация ^{12}C в системе мишени (^{244}Pu) достигается при условии, что импульсы образовавшихся $\alpha-$частиц равны. В силу большой массы ^{244}Pu, можно пренебречь энергией, передаваемой этому ядру. Поэтому 4-импульсы углерода и α-частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(^{12}C) &= (\sqrt{p^2+M^2}, 0, 0, p) \,, \\ p(3\alpha) &= (\sqrt{p^2+M^2}, 0, 0, \sqrt{p^2-\mu^2}) \,, \end{aligned} \tag{23}$$

где p - импульс ^{12}C в системе покоя ^{244}Pu и $\mu^2 = 9M_\alpha^2 - M^2 \approx 0.163$ ГэВ^2 . Тогда условие когерентной диссоциации запишется в виде

$$p - q = \sqrt{p^2 - \mu^2}, \tag{24}$$

и очевидно, что $p > \mu \approx 400$ МэВ. Возводя обе части равенства (24) в квадрат и учитывая, что $q \ll \mu$, получим

$$p \simeq \frac{\mu^2}{2q} = 3,09\text{ГэВ} \,.$$

Т.к. $\frac{p}{M} < \frac{1}{3}$, для оценки T воспользуемся нерелятивистской формулой

$$T = \frac{p^2}{2M} = \frac{(3,06\text{ГэВ})^2}{2 \cdot 11.178\text{ГэВ}} = 427 \text{ МэВ} \tag{25}$$

Ответ: 427 МэВ. Правильным считать ответ в интервале [200; 500] МэВ.

Критерии оценивания:
Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Условие когерентной диссоциации, выраженное формулой — **5 баллов**
- Правильный анализ кинематических условий — **3 балла**
- Формулировка адекватных приближений — **3 балла**
- Вывод формулы для минимальной энергии — **5 баллов**
- Правильный численный ответ — **1 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 4 **(16 баллов)**
Нейтральный пион, имеющий фиксированный импульс и движущийся с полной энергией $E = 1$ГэВ, распадается на два фотона: $\pi^0 \to \gamma\gamma$.
Найдите энергетический спектр (возможные энергии) продуктов распада в системе отсчета внешнего наблюдателя, вычислите минимальную и максимальную возможную энергию. Считайте массу π^0 равной 135МэВ$/c^2$.
Решение
Для решения этой задачи удобно воспользоваться преобразованиями Лоренца и переходами между различными система отсчета для упрощения вычислений. Так, рассмотрим распад $\pi^0 \to \gamma\gamma$ в системе отсчета покоя пиона. Закон сохранения 4-импульса записывается в следующем виде (считаем $c = 1$):

$$\begin{pmatrix} m_\pi \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1' \\ \vec{p_1'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2' \\ \vec{p_2'} \end{pmatrix},$$

где за E_i' и $\vec{p_i'}$ обозначены энергия и импульс одного из фотонов (в этой СО). Так как фотон является безмассовой частицей, его энергия и импульс связаны соотношением $E = p$. Тогда из закона сохранения 4-импульса следует, что энергии фотонов равны друг другу и являются константой, равной половине массы пиона: $E_1' = E_2' = E_\gamma' = m_\pi/2$.

Теперь для решения задачи нам по условию необходимо вычислить энергию фотонов в ЛСО. Для этого применим преобразование Лоренца для перехода из системы отсчета пиона. Так как пион обладает энергией E, у него есть γ-фактор $\gamma = E/m_\pi = 1000/135 \approx 7.4$, а его относительная скорость равна $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = \sqrt{1 - 7.4^{-2}} = 0.99$. Тогда преобразование Лоренца для фотона вдоль направления движения пиона записывается в виде

$$E_\gamma = \gamma E_1'\gamma + \beta\gamma p_\gamma'^{\parallel},$$

где $p_\gamma'^{\parallel} = p_\gamma' \cos\theta = E_\gamma' \cos\theta$ — проекция импульса фотона на ось, параллельную направлению движения пиона, а θ — угол между импульсом фотона и этой осью. Таким образом, подставив выражения для E_γ' и γ, получаем следующее выражение:

$$E_\gamma = E/2(1 + \beta\cos\theta).$$

Это означает, что спектр энергий фотонов является распределенным в зависимости от угла разлета. При этом максимальной энергия является при угле 0 (т.е. фотон летит вдоль движения пиона, $\cos\theta = 1$), а минимальной — при угле π (фотон летит в противоположную сторону движения пиона, $\cos\theta = -1$). Численно это будет:

$$E_\gamma^{max} = E/2(1 + \beta) \approx E = 1\text{ГэВ}$$
$$E_\gamma^{min} = E/2(1 - \beta) = E/2 \cdot 0.01 = 5\text{МэВ}$$

Критерии оценки:
Баллы указаны с "нарастающим итогом"

- В тексте решения присутствуют правильные рассуждения о необходимости преобразований Лоренца — **3 балла**

- Правильно получена энергия фотона в системе отсчета пиона — **3 балла**
- Правильно выполнено преобразование Лоренца и получено выражение для энергии E_γ — **7 баллов**
- Правильно получен численный ответ для минимальной и максимальной энергий — **3 балла**
- **Примечание**: Если правильный ответ (в т.ч. численный) получен каким-то другим разумным способом — ставить полный балл за задачу.

Задача 5 **(16 баллов)**

Для качественного описания неустойчивости вертикального положения плазмы в токамаке иногда используется модель жестких проводников. Плазменный шнур заменяется прямым проводом с током J, способным перемещаться по вертикальной оси z между двумя неподвижными токами J_{ec}, сонаправленными току плазмы и удаленными от нее на расстояние $z = \pm h$. Стенка вакуумной камеры токамака, токи индукции в которой препятствуют движению плазмы, также имитируется двумя эквидистантными проводниками, расположенными на оси z в точках $z = \pm a$. Пренебрегая сопротивлением стенки и полагая ее индуктивность на единицу длины равной $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$, оцените инкремент γ неустойчивости плазмы относительно малых смещений по вертикали. Сила тока составляет $J_{ec} = 0.9\,\text{МА}$ во внешних проводниках и $J = 0.5\,\text{МА}$ в плазме, расстояния от точки $z = 0$ до внешних обмоток и стенки равны, соответственно, $h = 1.2\,\text{м}$ и $a = 1\,\text{м}$. Линейная плотность плазмы составляет $\rho_l = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{кг/м}^3$.

Указание: Для нахождения ЭДС индукции в «стеночных» проводниках удобно перейти в систему отсчета, связанную с плазмой, и воспользоваться формальным определением ЭДС $\mathcal{E}_{ind} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, где $\mathbf{E}$ — электрическое поле в движущейся СО, а интеграл берется по длине проводника.

Ответ: $\gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l} \left(\frac{J_{ec}}{J} \left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1 \right)} = 2.5 \cdot 10^{-5}\,\text{с}^{-1}$ **Решение:** Уравнение движения плазменного шнура по вертикали (вдоль оси z) в модели жестких проводников дается вторым законом Ньютона

$$\rho_l \ddot{z} = F_{ec}(z) + F_w(z),$$

где ρ_l — линейная массовая плотность плазмы,

$$F_{ec}(z) = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h-z)} - \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h+z)} = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2}$$

— вертикальная проекция линейной плотности силы Ампера, действующей на плазменный ток J со стороны внешних проводников с токами J_{ec}, расположенными на расстоянии $z = \pm h$ от плазменного шнура по вертикали. Слагаемое

$$F_w(z) = \frac{\mu_0 J J_{w+}(z)}{2\pi(a-z)} - \frac{\mu_0 J J_{w-}(z)}{2\pi(a+z)}$$

описывает силу, возникающую из-за взаимодействия плазмы с магнитным полем токов в стенке, индуцируемых в ответ на ее движение. Эти токи имеют амплитуды $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, зависящие от смещения плазмы z, и находятся на расстояниях $z = a < h$ и $z = -a > -h$ от положения ее равновесия $z = 0$, соответственно.

Чтобы найти токи $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, запишем закон Кирхгофа для каждого из проводов

$$\ell_w \dot{J}_{w\pm} = \varepsilon_{\text{ind}}^{\pm},$$

где $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$ — индуктивность на единицу длины l. По условию, мы пренебрегли сопротивлением стенки. Линейную плотность ЭДС индукции можно найти по формуле

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{1}{l}\int \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{l}\int \mathbf{v}'\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mp v' B_{pl},$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{v}'\times\mathbf{B}$ — электрическое поле в СО, связанной с плазмой, $\mathbf{v}'$ — относительная скорость стенки, $v' = \dot{z}$ — ее проекция на ось z, а

$$B_{pl} = \frac{\mu_0 J}{2\pi(a\mp z)}$$

— величина магнитного поля, создаваемого плазмой в точке $z = \pm a$. Подставив выражение для ЭДС в закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{J}_{w\pm} = \mp J\frac{\dot{z}}{a\mp z},$$

общее решение которого

$$J_{w\pm}(z) = J\ln\left(1\mp\frac{z}{a}\right).$$

Подставим найденные токи $J_{w\pm}(z)$ во второй закон Ньютона. Для малого смещения достаточно ограничиться линейными по z/a и z/h приближениями $F_w(z)$ и $F_{ec}(z)$, так что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = \frac{\mu_0 J}{\pi\rho_l}\left(\frac{J_{ec}}{h^2} - \frac{J}{a^2}\right)z.$$

Его решение описывает экспоненциально нарастающее отклонение от равновесия — неустойчивость, квадрат инкремента γ^2 которой равен коэффициенту перед z.

Ответ: $\gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2\rho_l}\left(\frac{J_{ec}}{J}\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1\right)} = 2.5\cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с "нарастающим итогом"

— Записан 2-й закон Ньютона для плазмы — **1 балл**;

— Написаны верные выражения для сил Ампера, действующих на плазму со стороны внешних проводников и стенки — **3 балла**;

— Написан закон Кирхгофа для стенки — **1 балл**;

— Найдена связь тока в стенке с током плазмы — **5 баллов**;

— Получено выражение для инкремента неустойчивости — **4 балла**;

— Получен верный численный ответ — **2 балла**.

Вариант 2

Задача 1 **(4 балла)**
На будущем адронном коллайдере при столкновении протонов с энергией 50 ТэВ + 50 ТэВ планируется поиск нового $W'^{\pm}$-бозона с массой $600 \div 1200$ ГэВ в инклюзивной реакции

$$p + p \to W'^{\pm} + X$$

с последующим распадом W'^{+} (иди W'^{-}) на $\ell^{\pm}\nu_\ell$

$$W'^{+} \to \ell^{+}\nu_\ell \quad \text{или} \quad W'^{-} \to \ell^{-}\bar{\nu}_\ell$$

В планируемом сеансе работы ускорителя будут выделяться события, при которых бозон W' будет рождаться с небольшим (практически нулевым) поперечным импульсом относительно оси столкновения ($p_\perp(W') \ll m(W')$)

Вопросы:
Каким образом возможно (если возможно) измерить импульс нейтрино (или хотя бы какие-то компоненты $\vec{p}_\nu$) ?
Найти форму распределение заряженных лептонов по поперечному импульсу.
Возможно ли из формы распределения что-либо узнать о величине массы бозона ?

Решение.
В общем случае, импульс нейтрино на измеряется. Однако, в предположении, что в событиях образуется только один заряженный лептон и одно нейтрино можно "восстановить" поперечный импульс нейтрино

$$\vec{p}_{\perp\,\nu} = -\sum \vec{p}_\perp$$

где сумма берется по всем зарегистрированным частицам. При этом, продольный импульс нейтрино восстановить невозможно.

При лоренцевских преобразованиях вдоль оси столкновений поперечный импульс (перпендикулярная к этой оси компонента импульса) не меняется. Поэтому, далее решаем задачу в системе покоя W'-бозона.

Распределение продуктов распада в этой системе изотропно:

$$\frac{dN}{d\Omega} = F(\phi, \theta), \quad d\Omega = d\phi\, d\cos\theta$$

Где функция $F(\phi, \theta)$ не имеет сингулярной зависимости от углов. Так как поперечный импульс ($p_\perp = |\vec{p}_\perp|$) не зависит от азимутального угла, то

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \int \frac{dN}{d\Omega} d\phi = f(\cos\theta)$$

В системе покоя бозона имеем $p_\perp = \dfrac{m}{2}\sin\theta$. Теперь имеем:

$$p_\perp = \frac{m}{2}\sin\theta \quad \to \quad dp_\perp = \frac{m}{2}\cos\theta\, d\theta$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dN}{dp_\perp} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} f(\cos\theta) = \frac{4p_\perp}{m\sqrt{m^2 - 4p_\perp^2}} f(\cos\theta)$$

Обычно, зависимость функции $f(\cos\theta)$ довольно “гладкая”. Поэтому, из значения “резкого” пика имеем

$$p_\perp(\max) = \frac{m}{2}$$

Критерии оценки:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Указано, что сумма (векторов) поперечных импульсов зарегистрированы частиц равна поперечному импульсу нейтрино (со знаком (-1) и получена верная формула, описывающая распределение фотонов (т.е. числа событий) по поперечному импульсу фотона — **3 балла**
- Указано, что из положения максимума можно получить значение массы бозона — **1 балл**

Задача 2 **(17 баллов)**

В нейтринном эксперименте NOvA используется схема “off axis” для формирования пучка нейтрино. Первичный 120 ГэВ протонный пучок попадает в мишень, в которой образуются вторичные $\pi^\pm$-мезоны, из которых формируется квази-параллельный пучок, направленный вдоль оси протонного пучка. Мезоны распадаются в вакуумированном распадном канале на $\mu\nu$. Нейтринная установка NOvA расположена на расстоянии $\sim$ 800 км от места образования нейтрино на оси, повернутой на угол 14.6 мрад относительно оси распадного канала.

Считая, что в интересующем нас диапазоне энергии спектр π-мезонов линейно растет с энергией и угловая расходимость пучка π-мезонов рана $\sigma \sim 3$ мрад, найти положение пика в распределении по энергии нейтрино на установке NOvA и оценить ширину этого пика.

$m_\pi = 139.5$ МэВ, $m_\mu = 105$ МэВ **Решение**

Запишем преобразование Лоренца для нейтрино: имеем

$$E^*_\nu = \gamma E_\nu(1-\beta\cos\theta) = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

Здесь E_ν, E^*_ν - энергии нейтрино в лаб. системе и в системе покоя π-мезона, $\gamma = E_\pi/m_\pi$, $\beta = v_\pi/c$. Отсюда

$$E_\nu = \frac{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}{2\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

В релятивистском пределе и в пределе малого угла θ имеем:

$$E_\nu = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)E_\pi}{1+\gamma^2\theta^2}$$

Энергия нейтрино растет при малых E_π, а затем начинает падать.

Для распределения по энергии нейтрино имеем:

$$\frac{dN}{dE_\nu} = \frac{dN}{dE_\pi}\cdot\frac{1}{dE_\nu/dE_\pi} = \frac{cE_\pi(1+\gamma^2\theta^2)}{(1-m_\mu^2/m_\pi^2)(1-\gamma^2\theta^2)}$$

отсюда видно, что максимум распределения (полюс) достигается при $\gamma = 1/\theta$, $E_\pi = m_\pi/\theta$ и

$$E_\nu = E_\nu^{max} = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi}{20} = 2.0 \text{ ГэВ}$$

Ясно, что угловой разброс пучка пионов вызывает размазывание пика по энергии:

$$\frac{\sigma_{E_\nu}}{E_\nu} = \frac{\sigma_\theta}{\theta} = 0.2$$

то есть $\sigma_{E_\nu} = 0.4$ ГэВ.

Критерии оценивания:
Баллы указаны с "нарастающим итогом"

- Выписана формула $\gamma E_\nu(1 - \beta\cos\theta) = E_\nu^* = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ — **5 баллов**
- Выписано условие dE_ν/dE_π или $dE_\nu d\beta$ — **2 балла**
- Получена формула $E_\nu^{max} = (1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi/2\theta$ — **8 баллов**
- Правильный численный ответ — **2 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 3 **(17 баллов)**
Найти атомный номер и массовое число нуклида ${}^A_Z X$, если известно, что

- энергия связи его ядра, приходящаяся на один нуклон, на $W = 119.833(8)$ кэВ меньше аналогичной величины для изотопа ${}^{12}C$;
- избыток массы составляет $\Delta = 48,5899(2)$ МэВ;
- число нейтронов в его ядре на 51 больше числа протонов.

При решении задачи можно воспользоваться тем фактом, что атом водорода легче нейтрона на $\mu = 782,3(1)$ кэВ. Возможно ли однозначно установить нуклид, если погрешности указанных величин увеличить в 10 раз?
Решение
Будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$. Введем обозначения:
W_X энергия связи на нуклон в ${}^A_Z X$
W_C энергия связи на нуклон в ${}^{12}C$
Тогда $W_C = W_X + W$.
Массу m_X нуклида ${}^A_Z X$ можно выразить как через энергию связи AW_X, так и через избыток массы Δ, получаются соотношения

$$m_X = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - AW_X, \tag{26}$$
$$m_X = Au + \Delta, \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

где u — атомная единица массы; m_n, m_p и m_e — массы нейтрона, протона и электрона соответственно. Далее, масса $m(^{12}C)$ нуклида ^{12}C и W_C связаны формулой:

$$m(^{12}C) = 6(m_p + m_e + m_n) - 12W_C = 12u \ , \tag{29}$$

Теперь из формул (26), (27), и (29) следует, что

$$\begin{aligned} Am_n - Z(m_n - m_p - m_e) - A(W_C - W) &= Au + \Delta \\ W_C &= \frac{1}{2}(m_p + m_e + m_n) - u \ . \end{aligned} \tag{30}$$

С учетом разницы между числом нейтронов и числом протонов это дает

$$A\left(m_n - \frac{1}{2}(m_n + m_p + m_e) + u + W\right) = Au + \Delta + Z(m_n - m_p - m_e) \tag{31}$$

$$A = 2Z + 51 \tag{32}$$

Теперь видно, как можно использовать данную а условии задачи разницу масс нейтрона и атома водорода: пренебрегая энергией связи электрона и протона 13.6 эВ по сравнению с другими используемыми величинами, можно считать, что $m_n - m_p - m_e = \mu$. Теперь легко получить формулу для атомного номера

$$Z = -25,5 + \frac{\Delta - 25,5\mu}{2W} \ . \tag{33}$$

Предполагая независимость всех величин, фигурирующих в формуле (33), погрешность можно оценить по формуле

$$\delta Z = \frac{1}{2W^2}\sqrt{(\delta\tilde{\Delta})^2 W^2 + (\delta W)^2 \tilde{\Delta}^2} \ , \tag{34}$$

где $\tilde{\Delta} = \Delta - 25,5\mu$ и $(\delta\tilde{\Delta})^2 \approx (\delta\Delta)^2 + 650(\delta\mu)^2$.

Выражая все заданные величины в единицах кэВ:

$$\begin{aligned} \Delta &= 48589,9 \ , \\ \mu &= 782,3 \ , \\ W &= 119,833 \ , \\ \delta\Delta &= 0,2 \ , \\ \delta\mu &= 0,1 \ , \\ \delta W &= 0,008 \ , \end{aligned} \tag{35}$$

— получаем $Z = 94,0049(134) \Rightarrow A = 239$. В случае увеличения погрешности заданных величин в 10 раз, ближайшее альтернативное значение $Z = 95$ находится за пределами семи стандартных отклонений.

Ответ: плутоний-239, ${}^A_Z X = {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$. Увеличение погрешности исходных данных в 10 раз не может привести к неоднозначности.

Критерии оценки: *Баллы указаны с "нарастающим итогом"*

- понимание терминов, используемых в условии задачи, выраженное формулами — **5 балла**
- правильный анализ полученных соотношений — **3 балла**
- выполнение алгебраических преобразований, приводящих к ответу — **3 балла**
- Анализ неоднозначности полученного ответа — **6 баллов**
- Итого **17 баллов**

Задача 4 **(16 баллов)**

Экспериментальный детектор для изучения свойств CP-нарушения расположен достаточно далеко от источника рождения различных элементарных частиц, т.е. до него долетают такие частицы как $\pi^\pm$ и долгоживущие нейтральные каоны K_L^0, но не долетают короткоживущие каоны K_S^0.
Чему будет равно отношение вероятностей распадов (branching fraction) τ-лептонов

$$R = \frac{\Gamma(\tau^+ \to \overline{\nu}_\tau \pi^+ K^0)}{\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau \pi^- \overline{K}^0)},$$

измеренное с помощью такого детектора? Оцените, какая статистика необходима (сколько таких распадов нужно было бы зарегистрировать) для измерения величины CP-нарушения таким методом, если сейчас известна величина этого параметра $\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$?

Решение

Для решения задачи необходимо понимать природу системы нейтральных каонов и наличие массовых и флейворных состояний. Так, взаимодействуют в распадах флейворные состояния K^0 и $\overline{K}^0$, но они не являются массовыми (т.е. не имеют определенных массы и времени жизни). Массу имеют состояния, являющиеся CP-собственными, т.е. составленные из комбинации K^0 и $\overline{K}^0$ следующим образом:

$$K_1 = \frac{K^0 + \overline{K}^0}{\sqrt{2}}, \qquad K_2 = \frac{K^0 - \overline{K}^0}{\sqrt{2}}.$$

Известно при этом, что в реальности на эксперименте регистрируют экспериментальные состояния K_S^0 (короткоживущее, быстро распадается) и K_L^0. В мире, где CP сохраняется при слабых распадах, эти состояния совпадали бы с массовыми, т.е. $K_S^0 = K_1$, $K_L^0 = K_2$. Однако было обнаружено наличие CP-нарушения (величина порядка $\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$, из-за которого в экспериментально наблюдаемых состояниях есть примесь обоих массовых состояний, т.е.

$$K_S^0 = K_1 + \epsilon K_2, \qquad K_L^0 = K_2 + \epsilon K_1.$$

Это же можно записать в виде

$$K_1 = K_S^0 - \epsilon K_L^0, \qquad K_2 = K_L^0 - \epsilon K_S^0.$$

В изучаемых по условию распадах $\tau^{\pm}$ лептона рождаются флейворные состояния, а детектируют — K_L^0. Для того, чтобы связать их между собой, приравняем полученные выше выражения друг другу, т.е.

$$\frac{K^0+\overline{K}^0}{\sqrt{2}} = K_S^0 - \epsilon K_L^0,$$
$$\frac{K^0-\overline{K}^0}{\sqrt{2}} = K_L^0 - \epsilon K_S^0.$$

Нас интересует, сколько получается K_L^0 из K^0 (рождаемых в распадах τ^+) и сколько — из $\overline{K}^0$ (рождаемых в распадах τ^-), Решая эти уравнений относительно K^0 и $\overline{K}^0$, получаем:

$$K^0 \approx (K_S^0 + K_L^0)(1-\epsilon), \qquad \overline{K}^0 \approx (K_S^0 - K_L^0)(1+\epsilon).$$

Так как до по условию детектора долетают только состояния K_L^0 (состояния K_S^0 распадаются слишком быстро), то мы регистрируем разное количество частиц из распадов положительных и отрицательных τ-лептонов: из распадов τ^+ до детектора долетает $(1-\epsilon)K_L^0$, а из τ^- — $(1+\epsilon)K_L^0$, т.е. неравное количество. При этом $\pi^{\pm}$ мы регистрируем одинаково хорошо, они ничем не отличаются, вся разница — только в каонах из-за CP-нарушения.

В таком случае, итоговый ответ получается

$$R = \frac{\Gamma(\tau^+ \to \overline{\nu}_\tau \pi^+ K^0)}{\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau \pi^- \overline{K}^0)} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \approx 1-\epsilon^2 \approx 1 - 4\cdot 10^{-6}.$$

Так как итоговый ответ отличается от единицы на величину порядка 10^{-6}, то для того, чтобы экспериментально обнаружить это самое отличие, необходимо зарегистрировать на этом детекторе более 10^6 таких распадов (только тогда есть вероятность статистически значимого эффекта, на меньшей же статистике скорее всего отношение будет равно единице).

Критерии оценки: *Баллы указаны с "нарастающим итогом"*

- Сформулирована основная идея задачи, что разное количество K_L^0 из распадов τ разных знаков может быть обнаружено из-за CP-нарушения в системе нейтральных каонов, где флейворные состояния не являются массовыми — **3 балла**

- Проделаны выкладки (или выписаны сразу) для получения выражений связи между K^0 и K_L^0 — **8 баллов**
  Примечание: Если какие-то выражения выписаны правильно, но не получены правильно итоговые выражения связи между K^0 и K_L^0 — можно оценить в **4 балла**

- Правильно получено выражение для R — **3 балла**

- Правильно получена численная оценка и рассуждения о необходимой экспериментальной статистике — **2 балла**

Задача 5 **(16 баллов)**
Для качественного описания неустойчивости вертикального положения плазмы в токамаке иногда используется модель жестких проводников. Плазменный шнур заменяется прямым проводом с током J, способным перемещаться по вертикальной оси z между двумя неподвижными токами J_{ec}, сонаправленными току плазмы и удаленными от нее на расстояние $z = \pm h$. Стенка вакуумной камеры токамака, стабилизирующая плазму, также имитируется двумя эквидистантными проводниками, расположенными на оси z в точках $z = \pm a$. Пренебрегая сопротивлением стенки и полагая ее индуктивность на единицу длины равной $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$, оцените частоту ω малых колебаний плазмы около положения равновесия $z = 0$. Сила тока составляет $J_{ec} = 0.9\,\text{МА}$ во внешних проводниках и $J = 2.5\,\text{МА}$ в плазме, расстояния от точки $z = 0$ до внешних обмоток и стенки равны, соответственно, $h = 1.2\,\text{м}$ и $a = 1\,\text{м}$. Линейная плотность плазмы составляет $\rho_l = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{кг/м}^3$.
Указание: Для нахождения ЭДС индукции в «стеночных» проводниках удобно перейти в систему отсчета, связанную с плазмой, и воспользоваться формальным определением ЭДС $\mathcal{E}_{ind} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, где $\mathbf{E}$ — электрическое поле в движущейся СО, а интеграл берется по длине проводника.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l}\left(1 - \frac{J_{ec}}{J}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right)} = 2.16\,\text{МГц}$

Решение: Уравнение движения плазменного шнура по вертикали (вдоль оси z) в модели жестких проводников дается вторым законом Ньютона

$$\rho_l \ddot{z} = F_{ec}(z) + F_w(z),$$

где ρ_l — линейная массовая плотность плазмы,

$$F_{ec}(z) = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h-z)} - \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h+z)} = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{\pi}\frac{z}{h^2 - z^2}$$

— вертикальная проекция линейной плотности силы Ампера, действующей на плазменный ток J со стороны внешних проводников с токами J_{ec}, расположенными на расстоянии $z = \pm h$ от плазменного шнура по вертикали. Слагаемое

$$F_w(z) = \frac{\mu_0 J J_{w+}(z)}{2\pi(a-z)} - \frac{\mu_0 J J_{w-}(z)}{2\pi(a+z)}$$

описывает силу, возникающую из-за взаимодействия плазмы с магнитным полем токов в стенке, индуцируемых в ответ на ее движение. Эти токи имеют амплитуды $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, зависящие от смещения плазмы z, и находятся на расстояниях $z = a < h$ и $z = -a > -h$ от положения ее равновесия $z = 0$, соответственно.

Чтобы найти токи $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, запишем закон Кирхгофа для каждого из проводов

$$\ell_w \dot{J}_{w\pm} = \varepsilon^{\pm}_{\text{ind}},$$

где $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$ — индуктивность на единицу длины l. По условию, мы пренебрегли сопротивлением стенки. Линейную плотность ЭДС индукции можно найти по формуле

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{1}{l}\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{l}\int \mathbf{v}' \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mp v' B_{pl},$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ — электрическое поле в СО, связанной с плазмой, $\mathbf{v}'$ — относительная скорость стенки, $v' = \dot{z}$ — ее проекция на ось z, а

$$B_{pl} = \frac{\mu_0 J}{2\pi(a \mp z)}$$

— величина магнитного поля, создаваемого плазмой в точке $z = \pm a$. Подставив выражение для ЭДС в закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{J}_{w\pm} = \mp J \frac{\dot{z}}{a \mp z},$$

общее решение которого

$$J_{w\pm}(z) = J \ln\left(1 \mp \frac{z}{a}\right).$$

Подставим найденные токи $J_{w\pm}(z)$ во второй закон Ньютона. Для малого смещения достаточно ограничиться линейными по z/a и z/h приближениями $F_w(z)$ и $F_{ec}(z)$, так что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{\mu_0 J}{\pi \rho_l}\left(\frac{J}{a^2} - \frac{J_{ec}}{h^2}\right) z = 0.$$

Его решение описывает колебания около положения равновесия $z = 0$ с частотой, квадрат которой ω^2 равен коэффициенту перед z.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l}\left(1 - \frac{J_{ec}}{J}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right)} = 2.16\,\text{МГц}$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

— Записан 2-й закон Ньютона для плазмы — **1 балл**;

— Написаны верные выражения для сил Ампера, действующих на плазму со стороны внешних проводников и стенки — **3 балла**;

— Написан закон Кирхгофа для стенки — **1 балл**;

— Найдена связь тока в стенке с током плазмы — **5 баллов**;

— Получено выражение для частоты малых колебаний — **4 балла**;

— Получен верный численный ответ — **2 балла**.