

Категория участия: Магистратура/специалитет

Вариант 1

Задача 1 (4 балла)

На будущем адронном коллайдере при столкновении протонов с энергией 100 ТэВ + 100 ТэВ планируется поиск нового скалярного бозона Y с массой $500 \div 1000$ ГэВ / c в инклюзивной реакции

$$p + p \rightarrow Y + X$$

с последующим распадом Y на два γ -кванта ($Y \rightarrow \gamma\gamma$). В планируемом сеансе работы ускорителя будут выделяться события, при которых бозон Y будет рождаться с небольшим (практически нулевым) поперечным импульсом относительно оси столкновения ($p_{\perp}(Y) \ll m(Y)$) **Найти** форму распределения фотонов по поперечному импульсу. **Возможно ли** из формы распределения что-либо узнать о величине массы бозона?

Решение.

При лоренцевских преобразованиях вдоль оси столкновений поперечный импульс (перпендикулярная к этой оси компонента импульса) не меняется. Поэтому, далее решаем задачу в системе покоя Y -бозона.

По условию, спин Y -бозона равен нулю. Следовательно, распределение продуктов распада в этой системе изотропно:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \text{const}, \quad d\Omega = d\phi d\cos\theta$$

так как поперечный импульс ($p_{\perp} = |\vec{p}_{\perp}|$) не зависит от азимутального угла, то

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \int \frac{dN}{d\Omega} d\phi = \text{const}$$

В системе покоя бозона имеем $p_{\perp} = \frac{m}{2} \sin\theta$. Теперь имеем:

$$\begin{aligned} p_{\perp} = \frac{m}{2} \sin\theta &\rightarrow dp_{\perp} = \frac{m}{2} \cos\theta d\theta \\ \Rightarrow \frac{dN}{dp_{\perp}} = \frac{2 \sin\theta}{2 \cos\theta} &= \frac{4p_{\perp}}{m\sqrt{m^2 - 4p_{\perp}^2}} \end{aligned}$$

Из значения “резкого” пика имеем

$$p_{\perp}(\text{max}) = \frac{m}{2}$$

Критерии оценки:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Получена верная формула, описывающая распределение фотонов (т.е. числа событий) по поперечному импульсу фотона — **3 балла**
- Указано, что из положения максимума можно получить значение массы бозона — **1 балл**

Задача 2 (17 баллов)

В нейтринном эксперименте NOvA используется схема “off axis” для формирования пучка нейтрино. Первичный 120 ГэВ протонный пучок попадает в мишень, в которой образуются вторичные π^\pm -мезоны, из которых формируется квази-параллельный пучок, направленный вдоль оси протонного пучка. Мезоны распадаются в вакуумированном распадном канале на $\mu\nu$. Нейтринная установка NOvA расположена на расстоянии ~ 800 км от места образования нейтрино на оси, повернутой на угол 14.6 мрад относительно оси распадного канала.

Считая, что π -мезоны являются единственным источником нейтрино и распределены по энергии в интервале $0 - 30$ ГэВ, **найти** максимальную энергию нейтрино на установке NOvA.

$$m_\pi = 139.5 \text{ МэВ}, m_\mu = 105 \text{ МэВ}$$

Решение

Запишем преобразование Лоренца для нейтрино: имеем

$$E_\nu^* = \gamma E_\nu (1 - \beta \cos \theta) = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

Здесь E_ν , E_ν^* - энергии нейтрино в лаб. системе и в системе покоя π -мезона, $\gamma = E_\pi/m_\pi$, $\beta = v_\pi/c$. Отсюда

$$E_\nu = \frac{1 - m_\mu^2/m_\pi^2}{2\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

В релятивистском пределе и в пределе малого угла θ имеем:

$$E_\nu = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)E_\pi}{1 + \gamma^2\theta^2}$$

Энергия нейтрино растет при малых E_π , а затем начинает падать.

Найдем максимальную энергию из условия $dE_\nu/dE_\pi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dE_\nu}{dE_\pi} &= \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)(1 - \gamma^2\theta^2)}{1 + \gamma^2\theta^2} = 0 \\ \rightarrow \quad \gamma &= \frac{1}{\theta}, \quad E_\pi = \frac{m_\pi}{\theta}, \quad E_\nu^{max} = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi}{20} = 2.0 \text{ ГэВ} \end{aligned}$$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Выписана формула $\gamma E_\nu(1 - \beta \cos \theta) = E_\nu^* = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ — **5 баллов**
- Выписано условие dE_ν/dE_π или $dE_\nu d\beta$ — **2 балла**
- Получена формула $E_\nu^{max} = (1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi/2\theta$ — **8 баллов**
- Правильный численный ответ — **2 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 3 (17 баллов)

Оценить минимальную кинетическую энергию ядра углерода-12, налетающего на ядро ^{244}Pu , при которой возможна его когерентная диссоциация (т.е. развал при сохранении ядра-мишени) на три альфа-частицы. Массы ядер: углерода-12 11,1745 ГэВ, плутония-244 227,2890 ГэВ, гелия-4 - 3,7273 ГэВ. Радиус ядра считать равным $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, где $R_0 = 1.2$ фм.

Решение

0.1 Первый вариант решения.

Когерентная диссоциация возможна, если переданный импульс меньше минимального импульса частицы, локализованной внутри ядра $q_{min} \equiv q \simeq \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 A^{1/3}} = 26,3$ МэВ. Минимальная энергия, при которой происходит когерентная диссоциация ^{12}C в системе мишени (^{244}Pu) достигается при условии, что импульсы образовавшихся α -частиц равны. В силу большой массы ^{244}Pu , можно пренебречь энергией, передаваемой этому ядру. Поэтому 4-импульсы углерода и α -частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(^{12}\text{C}) &= (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - M^2}), \\ p(3\alpha) &= (E, 0, 0, \sqrt{E^2 - 9M_\alpha^2}), \end{aligned} \quad (18)$$

где M – масса ядра углерода-12, M_α – масса ядра гелия-4, $E = M + T$ – энергия ^{12}C , T – искомая кинетическая энергия. Тогда условие когерентной диссоциации запишется в виде

$$\sqrt{E^2 - M^2} - \sqrt{E^2 - 9M_\alpha^2} = q, \quad (19)$$

или

$$\sqrt{2MT + T^2} - \sqrt{2MT + T^2 - \mu^2} = q, \quad (20)$$

где $\mu^2 = 9M_\alpha^2 - M^2 \approx 0.163$ ГэВ². Дальнейшие алгебраические преобразования можно выполнить следующим образом:

$$\begin{aligned} 2T^2 + 4MT - \mu^2 - q^2 &= 2\sqrt{(2MT + T^2)(2MT + T^2 - \mu^2)}, \quad (21) \\ \left(T^2 + 2MT - \frac{\mu^2 + q^2}{2}\right)^2 &= (2MT + T^2)^2 - \mu^2(2MT + T^2), \\ - (T^2 + 2MT)(\mu^2 + q^2) + \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4} &= -\mu^2(2MT + T^2), \\ T^2 + 2MT &= \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4q^2}. \end{aligned}$$

Только положительный корень полученного квадратного уравнения имеет смысл:

$$T = M \left(\sqrt{1 + \frac{(\mu^2 + q^2)^2}{4M^2 q^2}} - 1 \right) \approx 420 \text{ МэВ}. \quad (22)$$

Ответ: 415 МэВ. Правильным считать ответ в интервале [200; 500] МэВ.

0.2 Второй вариант решения.

Когерентная диссоциация возможна, если переданный импульс меньше минимального импульса частицы, локализованной внутри ядра $q_{min} \equiv q \simeq \frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 A^{1/3}} = 26,3 \text{ МэВ}$. Минимальная энергия, при которой происходит когерентная диссоциация ^{12}C в системе мишени (^{244}Pu) достигается при условии, что импульсы образовавшихся α -частиц равны. В силу большой массы ^{244}Pu , можно пренебречь энергией, передаваемой этому ядру. Поэтому 4-импульсы углерода и α -частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(^{12}\text{C}) &= (\sqrt{p^2 + M^2}, 0, 0, p), \\ p(3\alpha) &= (\sqrt{p^2 + M^2}, 0, 0, \sqrt{p^2 - \mu^2}), \end{aligned} \quad (23)$$

где p - импульс ^{12}C в системе покоя ^{244}Pu и $\mu^2 = 9M_\alpha^2 - M^2 \approx 0.163 \text{ ГэВ}^2$. Тогда условие когерентной диссоциации запишется в виде

$$p - q = \sqrt{p^2 - \mu^2}, \quad (24)$$

и очевидно, что $p > \mu \approx 400 \text{ МэВ}$. Возводя обе части равенства (24) в квадрат и учитывая, что $q \ll \mu$, получим

$$p \simeq \frac{\mu^2}{2q} = 3,09 \text{ ГэВ}.$$

Т.к. $\frac{p}{M} < \frac{1}{3}$, для оценки T воспользуемся нерелятивистской формулой

$$T = \frac{p^2}{2M} = \frac{(3,06 \text{ ГэВ})^2}{2 \cdot 11.178 \text{ ГэВ}} = 427 \text{ МэВ} \quad (25)$$

Ответ: 427 МэВ. Правильным считать ответ в интервале [200; 500] МэВ.

Критерии оценивания:

Баллы указаны с "нарастающим итогом"

- Условие когерентной диссоциации, выраженное формулой — **5 баллов**
- Правильный анализ кинематических условий — **3 балла**
- Формулировка адекватных приближений — **3 балла**
- Вывод формулы для минимальной энергии — **5 баллов**
- Правильный численный ответ — **1 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 4 (16 баллов)

Нейтральный пион, имеющий фиксированный импульс и движущийся с полной энергией $E = 1\text{ГэВ}$, распадается на два фотона: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Найдите энергетический спектр (возможные энергии) продуктов распада в системе отсчета внешнего наблюдателя, вычислите минимальную и максимальную возможную энергию. Считайте массу π^0 равной $135\text{МэВ}/c^2$.

Решение

Для решения этой задачи удобно воспользоваться преобразованиями Лоренца и переходами между различными система отсчета для упрощения вычислений. Так, рассмотрим распад $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ в системе отсчета покоя пиона. Закон сохранения 4-импульса записывается в следующем виде (считаем $c = 1$):

$$\begin{pmatrix} m_\pi \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_1 \\ \vec{p}'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E'_2 \\ \vec{p}'_2 \end{pmatrix},$$

где за E'_i и \vec{p}'_i обозначены энергия и импульс одного из фотонов (в этой СО). Так как фотон является безмассовой частицей, его энергия и импульс связаны соотношением $E = p$. Тогда из закона сохранения 4-импульса следует, что энергии фотонов равны друг другу и являются константой, равной половине массы пиона: $E'_1 = E'_2 = E'_\gamma = m_\pi/2$.

Теперь для решения задачи нам по условию необходимо вычислить энергию фотонов в ЛСО. Для этого применим преобразование Лоренца для перехода из системы отсчета пиона. Так как пион обладает энергией E , у него есть γ -фактор $\gamma = E/m_\pi = 1000/135 \approx 7.4$, а его относительная скорость равна $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = \sqrt{1 - 7.4^{-2}} = 0.99$. Тогда преобразование Лоренца для фотона вдоль направления движения пиона записывается в виде

$$E_\gamma = \gamma E'_1 \gamma + \beta \gamma p'^{\parallel}_1,$$

где $p'^{\parallel}_1 = p'_1 \cos \theta = E'_1 \cos \theta$ — проекция импульса фотона на ось, параллельную направлению движения пиона, а θ — угол между импульсом фотона и этой осью. Таким образом, подставив выражения для E'_1 и γ , получаем следующее выражение:

$$E_\gamma = E/2(1 + \beta \cos \theta).$$

Это означает, что спектр энергий фотонов является распределенным в зависимости от угла разлета. При этом максимальной энергия является при угле 0 (т.е. фотон летит вдоль движения пиона, $\cos \theta = 1$), а минимальной — при угле π (фотон летит в противоположную сторону движения пиона, $\cos \theta = -1$). Численно это будет:

$$E_\gamma^{max} = E/2(1 + \beta) \approx E = 1\text{ГэВ}$$

$$E_\gamma^{min} = E/2(1 - \beta) = E/2 \cdot 0.01 = 5\text{МэВ}$$

Критерии оценки:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- В тексте решения присутствуют правильные рассуждения о необходимости преобразований Лоренца — **3 балла**

- Правильно получена энергия фотона в системе отсчета пиона — **3 балла**
- Правильно выполнено преобразование Лоренца и получено выражение для энергии E_γ — **7 баллов**
- Правильно получен численный ответ для минимальной и максимальной энергий — **3 балла**
- **Примечание:** Если правильный ответ (в т.ч. численный) получен каким-то другим разумным способом — ставить полный балл за задачу.

Задача 5 (16 баллов)

Для качественного описания неустойчивости вертикального положения плазмы в токамаке иногда используется модель жестких проводников. Плазменный шнур заменяется прямым проводом с током J , способным перемещаться по вертикальной оси z между двумя неподвижными токами J_{ec} , сонаправленными току плазмы и удаленными от нее на расстояние $z = \pm h$. Стенка вакуумной камеры токамака, токи индукции в которой препятствуют движению плазмы, также имитируется двумя эквидистантными проводниками, расположенными на оси z в точках $z = \pm a$. Пренебрегая сопротивлением стенки и полагая ее индуктивность на единицу длины равной $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$, оцените инкремент γ неустойчивости плазмы относительно малых смещений по вертикали. Сила тока составляет $J_{ec} = 0.9$ МА во внешних проводниках и $J = 0.5$ МА в плазме, расстояния от точки $z = 0$ до внешних обмоток и стенки равны, соответственно, $h = 1.2$ м и $a = 1$ м. Линейная плотность плазмы составляет $\rho_l = 4 \cdot 10^{-7}$ кг/м³.

Указание: Для нахождения ЭДС индукции в «стеночных» проводниках удобно перейти в систему отсчета, связанную с плазмой, и воспользоваться формальным определением ЭДС $\mathcal{E}_{ind} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, где \mathbf{E} — электрическое поле в движущейся СО, а интеграл берется по длине проводника.

Ответ: $\gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l} \left(\frac{J_{ec}}{J} \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1 \right)} = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ **Решение:** Уравнение движения плазменного шнура по вертикали (вдоль оси z) в модели жестких проводников дается вторым законом Ньютона

$$\rho_l \ddot{z} = F_{ec}(z) + F_w(z),$$

где ρ_l — линейная массовая плотность плазмы,

$$F_{ec}(z) = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h-z)} - \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h+z)} = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2}$$

— вертикальная проекция линейной плотности силы Ампера, действующей на плазменный ток J со стороны внешних проводников с токами J_{ec} , расположенными на расстоянии $z = \pm h$ от плазменного шнура по вертикали. Слагаемое

$$F_w(z) = \frac{\mu_0 J J_{w+}(z)}{2\pi(a-z)} - \frac{\mu_0 J J_{w-}(z)}{2\pi(a+z)}$$

описывает силу, возникающую из-за взаимодействия плазмы с магнитным полем токов в стенке, индуцируемых в ответ на ее движение. Эти токи имеют амплитуды $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, зависящие от смещения плазмы z , и находятся на расстояниях $z = a < h$ и $z = -a > -h$ от положения равновесия $= 0$, соответственно.

Чтобы найти токи $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, запишем закон Кирхгофа для каждого из проводов

$$\ell_w \dot{J}_{w\pm} = \varepsilon_{\text{ind}}^{\pm},$$

где $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$ — индуктивность на единицу длины l . По условию, мы пренебрегли сопротивлением стенки. Линейную плотность ЭДС индукции можно найти по формуле

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{1}{l} \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{l} \int \mathbf{v}' \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mp v' B_{pl},$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ — электрическое поле в СО, связанной с плазмой, \mathbf{v}' — относительная скорость стенки, $v' = \dot{z}$ — ее проекция на ось z , а

$$B_{pl} = \frac{\mu_0 J}{2\pi(a \mp z)}$$

— величина магнитного поля, создаваемого плазмой в точке $z = \pm a$. Подставив выражение для ЭДС в закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{J}_{w\pm} = \mp J \frac{\dot{z}}{a \mp z},$$

общее решение которого

$$J_{w\pm}(z) = J \ln \left(1 \mp \frac{z}{a} \right).$$

Подставим найденные токи $J_{w\pm}(z)$ во второй закон Ньютона. Для малого смещения достаточно ограничиться линейными по z/a и z/h приближениями $F_w(z)$ и $F_{ec}(z)$, так что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = \frac{\mu_0 J}{\pi \rho_l} \left(\frac{J_{ec}}{h^2} - \frac{J}{a^2} \right) z.$$

Его решение описывает экспоненциально нарастающее отклонение от равновесия — неустойчивость, квадрат инкремента γ^2 которой равен коэффициенту перед z .

Ответ: $\gamma = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l} \left(\frac{J_{ec}}{J} \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 1 \right)} = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Записан 2-й закон Ньютона для плазмы — **1 балл**;
- Написаны верные выражения для сил Ампера, действующих на плазму со стороны внешних проводников и стенки — **3 балла**;
- Написан закон Кирхгофа для стенки — **1 балл**;
- Найдена связь тока в стенке с током плазмы — **5 баллов**;
- Получено выражение для инкремента неустойчивости — **4 балла**;
- Получен верный численный ответ — **2 балла**

Вариант 2

Задача 1 (4 балла)

На будущем адронном коллайдере при столкновении протонов с энергией 50 ТэВ + 50 ТэВ планируется поиск нового W'^{\pm} -бозона с массой $600 \div 1200$ ГэВ в инклюзивной реакции

$$p + p \rightarrow W'^{\pm} + X$$

с последующим распадом W'^{+} (или W'^{-}) на $\ell^{\pm}\nu_{\ell}$

$$W'^{+} \rightarrow \ell^{+}\nu_{\ell} \quad \text{или} \quad W'^{-} \rightarrow \ell^{-}\bar{\nu}_{\ell}$$

В планируемом сеансе работы ускорителя будут выделяться события, при которых бозон W' будет рождаться с небольшим (практически нулевым) поперечным импульсом относительно оси столкновения ($p_{\perp}(W') \ll m(W')$)

Вопросы:

Каким образом возможно (если возможно) измерить импульс нейтрино (или хотя бы какие-то компоненты \vec{p}_{ν}) ?

Найти форму распределение заряженных лептонов по поперечному импульсу.

Возможно ли из формы распределения что-либо узнать о величине массы бозона ?

Решение.

В общем случае, импульс нейтрино не измеряется. Однако, в предположении, что в событиях образуется только один заряженный лептон и одно нейтрино можно “восстановить” поперечный импульс нейтрино

$$\vec{p}_{\perp \nu} = - \sum \vec{p}_{\perp}$$

где сумма берется по всем зарегистрированным частицам. При этом, продольный импульс нейтрино восстановить невозможно.

При лоренцевских преобразованиях вдоль оси столкновений поперечный импульс (перпендикулярная к этой оси компонента импульса) не меняется. Поэтому, далее решаем задачу в системе покоя W' -бозона.

Распределение продуктов распада в этой системе изотропно:

$$\frac{dN}{d\Omega} = F(\phi, \theta), \quad d\Omega = d\phi d\cos\theta$$

Где функция $F(\phi, \theta)$ не имеет сингулярной зависимости от углов. Так как поперечный импульс ($p_{\perp} = |\vec{p}_{\perp}|$) не зависит от азимутального угла, то

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \int \frac{dN}{d\Omega} d\phi = f(\cos\theta)$$

В системе покоя бозона имеем $p_{\perp} = \frac{m}{2} \sin\theta$. Теперь имеем:

$$\begin{aligned} p_{\perp} = \frac{m}{2} \sin\theta &\rightarrow dp_{\perp} = \frac{m}{2} \cos\theta d\theta \\ \Rightarrow \frac{dN}{dp_{\perp}} &= \frac{2 \sin\theta}{2 \cos\theta} f(\cos\theta) = \frac{4p_{\perp}}{m\sqrt{m^2 - 4p_{\perp}^2}} f(\cos\theta) \end{aligned}$$

Обычно, зависимость функции $f(\cos \theta)$ довольно “гладкая”. Поэтому, из значения “резкого” пика имеем

$$p_{\perp}(\max) = \frac{m}{2}$$

Критерии оценки:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Указано, что сумма (векторов) поперечных импульсов зарегистрированы частиц равна поперечному импульсу нейтрино (со знаком (-1) и получена верная формула, описывающая распределение фотонов (т.е. числа событий) по поперечному импульсу фотона — **3 балла**
- Указано, что из положения максимума можно получить значение массы бозона — **1 балл**

Задача 2 (17 баллов)

В нейтринном эксперименте NOvA используется схема “off axis” для формирования пучка нейтрино. Первичный 120 ГэВ протонный пучок попадает в мишень, в которой образуются вторичные π^{\pm} -мезоны, из которых формируется квази-параллельный пучок, направленный вдоль оси протонного пучка. Мезоны распадаются в вакуумированном распадном канале на $\mu\nu$. Нейтринная установка NOvA расположена на расстоянии ~ 800 км от места образования нейтрино на оси, повернутой на угол 14.6 мрад относительно оси распадного канала.

Считая, что в интересующем нас диапазоне энергии спектр π -мезонов линейно растет с энергией и угловая расходимость пучка π -мезонов равна $\sigma \sim 3$ мрад, найти положение пика в распределении по энергии нейтрино на установке NOvA и оценить ширину этого пика.

$m_{\pi} = 139.5$ МэВ, $m_{\mu} = 105$ МэВ **Решение**

Запишем преобразование Лоренца для нейтрино: имеем

$$E_{\nu}^* = \gamma E_{\nu}(1 - \beta \cos \theta) = \frac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{2m_{\pi}}$$

Здесь E_{ν} , E_{ν}^* - энергии нейтрино в лаб. системе и в системе покоя π -мезона, $\gamma = E_{\pi}/m_{\pi}$, $\beta = v_{\pi}/c$. Отсюда

$$E_{\nu} = \frac{1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2}{2\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

В релятивистском пределе и в пределе малого угла θ имеем:

$$E_{\nu} = \frac{(1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2)E_{\pi}}{1 + \gamma^2\theta^2}$$

Энергия нейтрино растет при малых E_{π} , а затем начинает падать.

Для распределения по энергии нейтрино имеем:

$$\frac{dN}{dE_{\nu}} = \frac{dN}{dE_{\pi}} \cdot \frac{1}{dE_{\nu}/dE_{\pi}} = \frac{cE_{\pi}(1 + \gamma^2\theta^2)}{(1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2)(1 - \gamma^2\theta^2)}$$

отсюда видно, что максимум распределения (полюс) достигается при $\gamma = 1/\theta$, $E_\pi = m_\pi/\theta$ и

$$E_\nu = E_\nu^{max} = \frac{(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi}{20} = 2.0 \text{ ГэВ}$$

Ясно, что угловой разброс пучка пионов вызывает размазывание пика по энергии:

$$\frac{\sigma_{E_\nu}}{E_\nu} = \frac{\sigma_\theta}{\theta} = 0.2$$

то есть $\sigma_{E_\nu} = 0.4 \text{ ГэВ}$.

Критерии оценивания:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Выписана формула $\gamma E_\nu(1 - \beta \cos \theta) = E_\nu^* = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi$ — **5 баллов**
- Выписано условие dE_ν/dE_π или $dE_\nu d\beta$ — **2 балла**
- Получена формула $E_\nu^{max} = (1 - m_\mu^2/m_\pi^2)m_\pi/2\theta$ — **8 баллов**
- Правильный численный ответ — **2 балл**
- Итого **17 баллов**

Задача 3 (17 баллов)

Найти атомный номер и массовое число нуклида ${}^A_Z X$, если известно, что

- энергия связи его ядра, приходящаяся на один нуклон, на $W = 119.833(8) \text{ кэВ}$ меньше аналогичной величины для изотопа ${}^{12}C$;
- избыток массы составляет $\Delta = 48,5899(2) \text{ МэВ}$;
- число нейтронов в его ядре на 51 больше числа протонов.

При решении задачи можно воспользоваться тем фактом, что атом водорода легче нейтрона на $\mu = 782,3(1) \text{ кэВ}$. Возможно ли однозначно установить нуклид, если погрешности указанных величин увеличить в 10 раз?

Решение

Будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$. Введем обозначения:

W_X энергия связи на нуклон в ${}^A_Z X$

W_C энергия связи на нуклон в ${}^{12}C$

Тогда $W_C = W_X + W$.

Массу m_X нуклида ${}^A_Z X$ можно выразить как через энергию связи AW_X , так и через избыток массы Δ , получаются соотношения

$$m_X = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - AW_X, \quad (26)$$

$$m_X = Au + \Delta, \quad (27)$$

$$(28)$$

где u — атомная единица массы; m_n , m_p и m_e — массы нейтрона, протона и электрона соответственно. Далее, масса $m(^{12}\text{C})$ нуклида ^{12}C и W_C связаны формулой:

$$m(^{12}\text{C}) = 6(m_p + m_e + m_n) - 12W_C = 12u, \quad (29)$$

Теперь из формул (26), (27), и (29) следует, что

$$\begin{aligned} Am_n - Z(m_n - m_p - m_e) - A(W_C - W) &= Au + \Delta \\ W_C &= \frac{1}{2}(m_p + m_e + m_n) - u. \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом разницы между числом нейтронов и числом протонов это дает

$$A \left(m_n - \frac{1}{2}(m_n + m_p + m_e) + u + W \right) = Au + \Delta + Z(m_n - m_p - m_e) \quad (31)$$

$$A = 2Z + 51 \quad (32)$$

Теперь видно, как можно использовать данную а условия задачи разницу масс нейтрона и атома водорода: пренебрегая энергией связи электрона и протона 13.6 эВ по сравнению с другими используемыми величинами, можно считать, что $m_n - m_p - m_e = \mu$. Теперь легко получить формулу для атомного номера

$$Z = -25,5 + \frac{\Delta - 25,5\mu}{2W}. \quad (33)$$

Предполагая независимость всех величин, фигурирующих в формуле (33), погрешность можно оценить по формуле

$$\delta Z = \frac{1}{2W^2} \sqrt{(\delta\tilde{\Delta})^2 W^2 + (\delta W)^2 \tilde{\Delta}^2}, \quad (34)$$

где $\tilde{\Delta} = \Delta - 25,5\mu$ и $(\delta\tilde{\Delta})^2 \approx (\delta\Delta)^2 + 650(\delta\mu)^2$.

Выражая все заданные величины в единицах кэВ:

$$\begin{aligned} \Delta &= 48589,9, \\ \mu &= 782,3, \\ W &= 119,833, \\ \delta\Delta &= 0,2, \\ \delta\mu &= 0,1, \\ \delta W &= 0,008, \end{aligned} \quad (35)$$

— получаем $Z = 94,0049(134) \Rightarrow A = 239$. В случае увеличения погрешности заданных величин в 10 раз, ближайшее альтернативное значение $Z = 95$ находится за пределами семи стандартных отклонений.

Ответ: плутоний-239, ${}^A_Z\text{X} = {}^{239}_{94}\text{Pu}$. Увеличение погрешности исходных данных в 10 раз не может привести к неоднозначности.

Критерии оценки: Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- понимание терминов, используемых в условии задачи, выраженное формулами — **5 балла**
- правильный анализ полученных соотношений — **3 балла**
- выполнение алгебраических преобразований, приводящих к ответу — **3 балла**
- Анализ неоднозначности полученного ответа — **6 баллов**
- Итого **17 баллов**

Задача 4 (16 баллов)

Экспериментальный детектор для изучения свойств CP -нарушения расположен достаточно далеко от источника рождения различных элементарных частиц, т.е. до него долетают такие частицы как π^\pm и долгоживущие нейтральные каоны K_L^0 , но не долетают короткоживущие каоны K_S^0 .

Чему будет равно отношение вероятностей распадов (branching fraction) τ -лептонов

$$R = \frac{\Gamma(\tau^+ \rightarrow \bar{\nu}_\tau \pi^+ K^0)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \bar{K}^0)},$$

измеренное с помощью такого детектора? Оцените, какая статистика необходима (сколько таких распадов нужно было бы зарегистрировать) для измерения величины CP -нарушения таким методом, если сейчас известна величина этого параметра $\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$?

Решение

Для решения задачи необходимо понимать природу системы нейтральных каонов и наличие массовых и флейворных состояний. Так, взаимодействуют в распадах флейворные состояния K^0 и \bar{K}^0 , но они не являются массовыми (т.е. не имеют определенных массы и времени жизни). Массу имеют состояния, являющиеся CP -собственными, т.е. составленные из комбинации K^0 и \bar{K}^0 следующим образом:

$$K_1 = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}}, \quad K_2 = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}}.$$

Известно при этом, что в реальности на эксперименте регистрируют экспериментальные состояния K_S^0 (короткоживущее, быстро распадается) и K_L^0 . В мире, где CP сохраняется при слабых распадах, эти состояния совпадали бы с массовыми, т.е. $K_S^0 = K_1$, $K_L^0 = K_2$. Однако было обнаружено наличие CP -нарушения (величина порядка $\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$, из-за которого в экспериментально наблюдаемых состояниях есть примесь обоих массовых состояний, т.е.

$$K_S^0 = K_1 + \epsilon K_2, \quad K_L^0 = K_2 + \epsilon K_1.$$

Это же можно записать в виде

$$K_1 = K_S^0 - \epsilon K_L^0, \quad K_2 = K_L^0 - \epsilon K_S^0.$$

В изучаемых по условию распадах τ^\pm лептона рождаются флейворные состояния, а детектируют — K_L^0 . Для того, чтобы связать их между собой, приравняем полученные выше выражения друг другу, т.е.

$$\frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}} = K_S^0 - \epsilon K_L^0,$$

$$\frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} = K_L^0 - \epsilon K_S^0.$$

Нас интересует, сколько получается K_L^0 из K^0 (рождаемых в распадах τ^+) и сколько — из \bar{K}^0 (рождаемых в распадах τ^-), Решая эти уравнений относительно K^0 и \bar{K}^0 , получаем:

$$K^0 \approx (K_S^0 + K_L^0)(1 - \epsilon), \quad \bar{K}^0 \approx (K_S^0 - K_L^0)(1 + \epsilon).$$

Так как до по условию детектора долетают только состояния K_L^0 (состояния K_S^0 распадаются слишком быстро), то мы регистрируем разное количество частиц из распадов положительных и отрицательных τ -лептонов: из распадов τ^+ до детектора долетает $(1 - \epsilon)K_L^0$, а из τ^- — $(1 + \epsilon)K_L^0$, т.е. неравное количество. При этом π^\pm мы регистрируем одинаково хорошо, они ничем не отличаются, вся разница — только в каонах из-за CP -нарушения.

В таком случае, итоговый ответ получается

$$R = \frac{\Gamma(\tau^+ \rightarrow \bar{\nu}_\tau \pi^+ K^0)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \bar{K}^0)} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \approx 1 - \epsilon^2 \approx 1 - 4 \cdot 10^{-6}.$$

Так как итоговый ответ отличается от единицы на величину порядка 10^{-6} , то для того, чтобы экспериментально обнаружить это самое отличие, необходимо зарегистрировать на этом детекторе более 10^6 таких распадов (только тогда есть вероятность статистически значимого эффекта, на меньшей же статистике скорее всего отношение будет равно единице).

Критерии оценки: Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Сформулирована основная идея задачи, что разное количество K_L^0 из распадов τ разных знаков может быть обнаружено из-за CP -нарушения в системе нейтральных каонов, где флейворные состояния не являются массовыми — **3 балла**
- Прделаны выкладки (или выписаны сразу) для получения выражений связи между K^0 и K_L^0 — **8 баллов**
Примечание: Если какие-то выражения выписаны правильно, но не получены правильно итоговые выражения связи между K^0 и K_L^0 — можно оценить в **4 балла**
- Правильно получено выражение для R — **3 балла**
- Правильно получена численная оценка и рассуждения о необходимой экспериментальной статистике — **2 балла**

Задача 5 (16 баллов)

Для качественного описания неустойчивости вертикального положения плазмы в токамаке иногда используется модель жестких проводников. Плазменный шнур заменяется прямым проводом с током J , способным перемещаться по вертикальной оси z между двумя неподвижными токами J_{ec} , сонаправленными току плазмы и удаленными от нее на расстояние $z = \pm h$. Стенка вакуумной камеры токамака, стабилизирующая плазму, также имитируется двумя эквидистантными проводниками, расположенными на оси z в точках $z = \pm a$. Пренебрегая сопротивлением стенки и полагая ее индуктивность на единицу длины равной $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$, оцените частоту ω малых колебаний плазмы около положения равновесия $z = 0$. Сила тока составляет $J_{ec} = 0.9$ МА во внешних проводниках и $J = 2.5$ МА в плазме, расстояния от точки $z = 0$ до внешних обмоток и стенки равны, соответственно, $h = 1.2$ м и $a = 1$ м. Линейная плотность плазмы составляет $\rho_l = 4 \cdot 10^{-7}$ кг/м³.

Указание: Для нахождения ЭДС индукции в «стеночных» проводниках удобно перейти в систему отсчета, связанную с плазмой, и воспользоваться формальным определением ЭДС $\mathcal{E}_{ind} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, где \mathbf{E} — электрическое поле в движущейся СО, а интеграл берется по длине проводника.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l} \left(1 - \frac{J_{ec}}{J} \left(\frac{a}{h}\right)^2\right)} = 2.16$ МГц

Решение: Уравнение движения плазменного шнура по вертикали (вдоль оси z) в модели жестких проводников дается вторым законом Ньютона

$$\rho_l \ddot{z} = F_{ec}(z) + F_w(z),$$

где ρ_l — линейная массовая плотность плазмы,

$$F_{ec}(z) = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h-z)} - \frac{\mu_0 J J_{ec}}{2\pi(h+z)} = \frac{\mu_0 J J_{ec}}{\pi} \frac{z}{h^2 - z^2}$$

— вертикальная проекция линейной плотности силы Ампера, действующей на плазменный ток J со стороны внешних проводников с токами J_{ec} , расположенными на расстоянии $z = \pm h$ от плазменного шнура по вертикали. Слагаемое

$$F_w(z) = \frac{\mu_0 J J_{w+}(z)}{2\pi(a-z)} - \frac{\mu_0 J J_{w-}(z)}{2\pi(a+z)}$$

описывает силу, возникающую из-за взаимодействия плазмы с магнитным полем токов в стенке, индуцируемых в ответ на ее движение. Эти токи имеют амплитуды $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, зависящие от смещения плазмы z , и находятся на расстояниях $z = a < h$ и $z = -a > -h$ от положения ее равновесия $z = 0$, соответственно.

Чтобы найти токи $J_{w+}(z)$ и $J_{w-}(z)$, запишем закон Кирхгофа для каждого из проводов

$$\ell_w \dot{J}_{w\pm} = \varepsilon_{ind}^{\pm},$$

где $\ell_w = \mu_0/(2\pi)$ — индуктивность на единицу длины l . По условию, мы пренебрегли сопротивлением стенки. Линейную плотность ЭДС индукции можно найти по формуле

$$\varepsilon_{ind} = \frac{1}{l} \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{l} \int \mathbf{v}' \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mp v' B_{pl},$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ — электрическое поле в СО, связанной с плазмой, \mathbf{v}' — относительная скорость стенки, $v' = \dot{z}$ — ее проекция на ось z , а

$$B_{pl} = \frac{\mu_0 J}{2\pi(a \mp z)}$$

— величина магнитного поля, создаваемого плазмой в точке $z = \pm a$. Подставив выражение для ЭДС в закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{J}_{w\pm} = \mp J \frac{\dot{z}}{a \mp z},$$

общее решение которого

$$J_{w\pm}(z) = J \ln \left(1 \mp \frac{z}{a} \right).$$

Подставим найденные токи $J_{w\pm}(z)$ во второй закон Ньютона. Для малого смещения достаточно ограничиться линейными по z/a и z/h приближениями $F_w(z)$ и $F_{ec}(z)$, так что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{\mu_0 J}{\pi \rho_l} \left(\frac{J}{a^2} - \frac{J_{ec}}{h^2} \right) z = 0.$$

Его решение описывает колебания около положения равновесия $z = 0$ с частотой, квадрат которой ω^2 равен коэффициенту перед z .

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 J^2}{\pi a^2 \rho_l} \left(1 - \frac{J_{ec}}{J} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right)} = 2.16 \text{ МГц}$

Критерии оценивания:

Баллы указаны с “нарастающим итогом”

- Записан 2-й закон Ньютона для плазмы — **1 балл**;
- Написаны верные выражения для сил Ампера, действующих на плазму со стороны внешних проводников и стенки — **3 балла**;
- Написан закон Кирхгофа для стенки — **1 балл**;
- Найдена связь тока в стенке с током плазмы — **5 баллов**;
- Получено выражение для частоты малых колебаний — **4 балла**;
- Получен верный численный ответ — **2 балла**.