



Задания заключительного этапа
Всероссийской олимпиады студентов «Я – профессионал»
по направлению «Математическое моделирование»

Категория участия «Бакалавриат»

Блок «Моделирование социально-экономических процессов», составленный с партнером по методической составляющей ООО «Системные решения».

Задача 1 (15 баллов). Луг, являющийся общественным благом, используется фермой, специализирующейся в разведении скота, которая пасет на нем крупный рогатый скот, и пасекой, собирающей на этом лугу мед. Функция затрат фермы по разведению скота выражается формулой:

$$TC_1 = 10 + 15Q_1 + 0,25Q_1^2,$$

а функция затрат пасеки:

$$TC_2 = 5 + 5Q_2 + 0,5Q_2^2 + Q_1^2,$$

где Q_1, Q_2 – объемы производства продукции компаниями по разведению скота и сбору меда соответственно. Ферма, специализирующаяся в разведении скота, продает единицу своей продукции по цене $P_1 = 200$, а пасека – по цене $P_2 = 400$. Пасека может взимать с фермы фиксированную плату за каждую единицу произведенной фермой продукции, так как крупный рогатый скот вытаптывает луговые растения, с которых пчелы собирают нектар. Какая плата будет установлена, исходя из принципа максимизации прибыли каждой компании?

Задача 2 (15 баллов). Два фермера – Огородов и Урожайкин – имеют земельные фермы в одном регионе. У каждого из них есть информация о распределении вероятностей урожая на полях своей фермы. Огородов каждый год выбирает оптимальное распределение посева с учетом своего закона распределения.

Урожайкин, будучи менее заинтересованным в деталях, предпочитает не тратить время на анализ и выбор распределения. Поэтому предложите алгоритм, согласно которому Урожайкин по каждому посеву Огородова, сможет получить реализацию своего посева, т.е. описание функции, которая задает отображение множества посевов Урожайкина во множество посевов Огородова.

Задача 3 (20 баллов). Предприниматель планирует запустить в апреле рекламную кампанию для своего нового продукта, разрабатывая план рекламных мероприятий на весь период. Существует 4 различных вида рекламы: онлайн-реклама, телевизионные рекламные ролики, уличные рекламные щиты и реклама в социальных сетях.

Каждый из видов рекламы вносит свой вклад в успешность продукта, представленный условной «эффективностью», которая нелинейно зависит от времени использования и вычисляется по формуле $u_i = c_i * \sqrt{t_i}$, $i = 1, \dots, 4$, где $c_i = i^2$ – коэффициент эффективности для этого вида рекламы, t_i – время демонстрации рекламы вида i .

Кроме «эффективности», для каждого вида рекламы есть вероятность привести к «пресыщению» клиента этим видом рекламы, из-за чего продукт может потерять популярность, и вся рекламная компания будет провалена вне зависимости от результатов других видов рекламы. Вероятность, что не произойдет пресыщения данным видом рекламы с течением времени, определяется функцией $p_i = e^{-it_i}$, $i = 1, \dots, 4$.

Необходимо определить такой план рекламной кампании, который максимизирует математическое ожидание суммарной «эффективности» продукта и, следовательно, его успеха на рынке. При этом, чтобы обеспечить эффективное использование рекламных ресурсов, различные виды рекламы не могут быть одновременно запущены.



Блок «Моделирование физических процессов и процессов механики», составленный с партнером по методической составляющей ООО «РН-БашНИПИнефть».

Задача 4 (15 баллов). При разработке нефтегазовых месторождений важной задачей является расчет установившегося режима эксплуатации скважины. При механизированной эксплуатации скважин (с использованием насосов) расчет основан на балансе работы системы «пласт-насос». Пусть производительность насоса (объемный расход перекачиваемой за единицу времени жидкости) равна Q , а сам насос спущен в скважину с помощью насосно-компрессорных труб (НКТ). В установившемся режиме работы скважины производительность насоса обеспечивается за счет притока жидкости из пласта, величина которого равна

$$Q_{\text{пл}} = K(P_{\text{пл}} - P_c)$$

где K – коэффициент продуктивности пласта, $P_{\text{пл}}$ – пластовое давление, P_c – давление в скважине напротив пласта (забойное давление). В свою очередь, давление в скважине обусловлено весом столба жидкости в стволе скважины H (рис. 1).

Для насоса производительностью $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут}$ и пласта, имеющего коэффициент продуктивности $K = 5 \text{ м}^3/(\text{сут} \cdot \text{МПа})$ и пластовое давление $P_{\text{пл}} = 12 \text{ МПа}$, определить установившееся забойное давление в скважине P_c и высоту столба жидкости H . Ответ дать в мегапаскалях МПа и метрах соответственно. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 , плотность жидкости в стволе скважины – 1000 кг/м^3 .

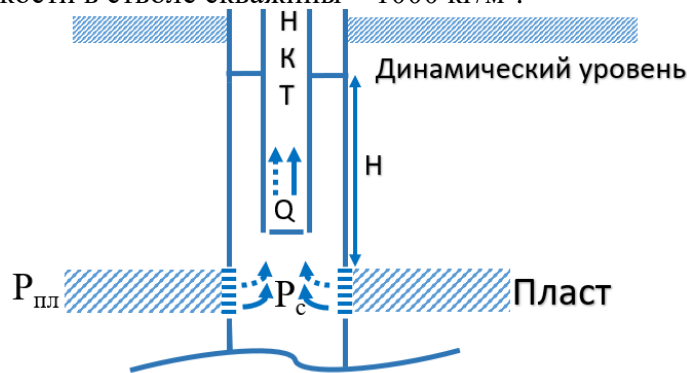
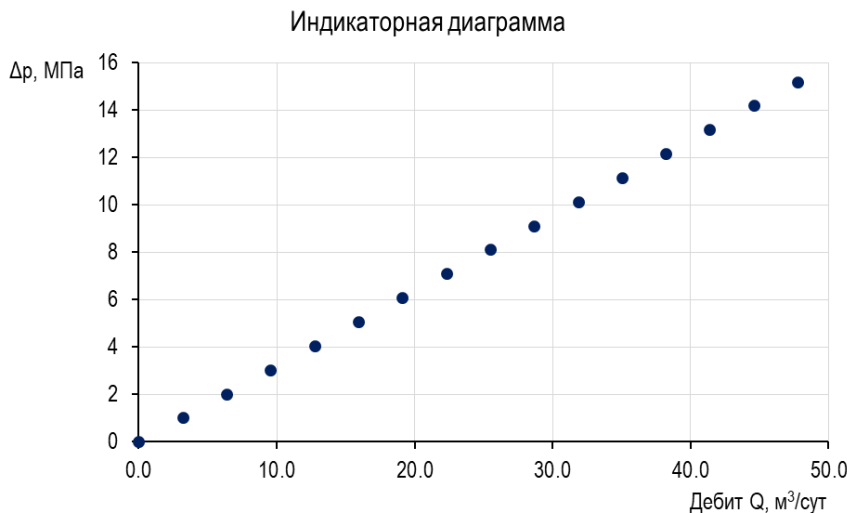


Рис. 1. Схема эксплуатации скважины

Задача 5 (15 баллов). При эксплуатации скважины важной ее характеристикой является индикаторная диаграмма, характеризующая зависимость создаваемой депрессии на пласт (разности пластового давления и забойного давления) от дебита скважины. На рис. 2 показан график результатов измерения в нефтяной скважине давления и дебита.



Рскв, МПа	ΔР, МПа	Q, м³/сут
25.3	0.0	0.0
24.3	1.0	3.2
23.3	2.0	6.4
22.3	3.0	9.6
21.3	4.1	12.7
20.3	5.1	15.9
19.3	6.1	19.1
18.2	7.1	22.3
17.2	8.1	25.5
16.2	9.1	28.7
15.2	10.1	31.8
14.2	11.1	35.0
13.2	12.2	38.2
12.2	13.2	41.4
11.1	14.2	44.6
10.1	15.2	47.8

Рис. 2. Индикаторная диаграмма



Используя известное уравнение для установившейся фильтрации жидкости в пористой среде (пласте) – уравнение Дюпюи, определить пластовое давление и коэффициент проницаемости пласта:

$$Q = \frac{2\pi Kh (P_{пл.} - P_{скв.})}{\mu \ln\left(\frac{R_{к}}{r_{скв.}}\right)}$$

где Q – дебит скважины, K – коэффициент проницаемости пласта, h – толщина пласта, μ – вязкость жидкости, $P_{пл.}$ – пластовое давление, $P_{скв.}$ – давление в скважине (забойное), $R_{к}$ – радиус пласта, $r_{скв.}$ – радиус скважины.

Известно, что радиус пласта равен 100 м, радиус скважины – 0.1 м, вязкость нефти – 5 МПа·с, толщина пласта – 1 м.

Задача 6 (20 баллов). Квадрокоптер обладает способностью парить в воздухе со скоростью $v(t)$ в условиях полного безветрия. Квадрокоптеру необходимо взлететь в потоке воздуха,двигающемся со скоростью $w(t)$ (где $w < v$), и пролететь определенное время T , после чего приземлиться в исходной точке. Оцените минимальную и максимальную длину возможного пути квадрокоптера при условии, что траектория полета не прерывается и имеет кусочно-непрерывную первую производную. Силой сопротивления воздуха и силой тяжести можно пренебречь.